

R

J 1812/1

28. 1982

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

Tomul XXVIII (XXXII)

Fasc. 1—4

1982-04-5



Secția I

MECANICĂ

1982

RECEIVED DEPT. OF AGRICULTURE

APR 1 1901

U. S. DEPT. OF AGRICULTURE

WASHINGTON, D. C.

1901

1982

COMITUL DE REDACTIE
Prof. dr. ing. VAL. ILIUTARU
Prof. dr. ing. N. V. ROTAN
Prof. dr. ing. M. GABRIEL
Prof. dr. P. M. GABRIEL
Prof. dr. ing. G. CR. GABRIEL
Prof. dr. ing. G. CR. GABRIEL

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

Tomul XXVIII (XXXII)

Fasc. 1—4

Secția I

MECANICĂ

COMITUL DE REDACTIE
AL SECȚIEI
I MECANICĂ
Prof. dr. ing. AL. C. C. C. C.
Prof. dr. ing. N. I. I. I.
Prof. dr. ing. E. E. E. E.

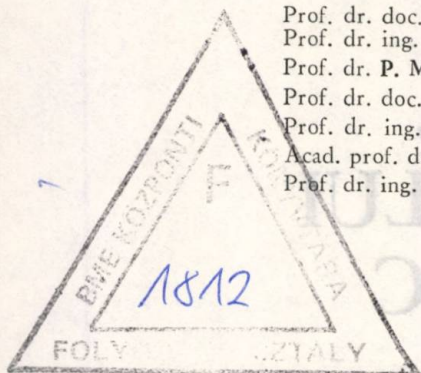
1982

Prof. dr. ing. D. M. M. M.
(redactor responsabil)
Prof. dr. ing. ALFRED. BRATER
(redactor)
Asist. ing. ANETA BRATER
(redactor)

1989

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. dr. doc. VAL. BLIDARU
 Prof. dr. doc. N. V. BOȚAN
 Prof. dr. ing. M. GAFIȚANU (președinte)
 Prof. dr. P. MĂLCOMETE
 Prof. dr. doc. D. MANGERON
 Prof. dr. ing. T. SILION
 Acad. prof. dr. doc. CR. SIMIONESCU
 Prof. dr. ing. I. VLAD



(XXXX) IIIVXX IumioT

Presc. 1-4



See 118

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI I MECANICĂ

Prof. dr. doc. AL. CLIMESCU
 Prof. dr. doc. N. IRIMICIUC
 Prof. dr. doc. E. LUCA

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON
 (redactor responsabil)
 Prof. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER
 (secretar)
 Asist. ing. ANETA BRAIER
 (redactor)

1882

Secția I

MECANICĂ

SUMAR

	<u>Pag</u>
R. P. VOINEA, A. M. KRALL (S.U.A.), L. E. KRIVOȘEIN (U.R.S.S.), U. D'AMBROSIO (Brazilia) și P. T. CRĂCIUNAȘ, Metoda ecuațiilor integrale în studiul sistemelor cu autocontrol și cu operatori ereditari și polivibranți (engl., rez. rom.).	7
SERGIU T. CHIRIACESCU și D. I. MANGERON, Controlabilitatea și observabilitatea sistemelor mecanice liniare invariante în timp (rom., rez. engl.)	17
C. I. BORȘ, Despre medii continue nelocale (engl., rez. rom.)	23
ELISABETA RUSU, Vibrațiile termoelastice ale unui cilindru circular într-o nouă teorie a termoelasticității (engl., rez. rom.)	29
GABRIELA SILVIA CIUMAȘU, Teoremă de compatibilitate și unicitate a soluției echilibrului unui solid elastic dipolar (engl., rez. rom.)	35
I. IBĂNESCU, O teorie generalizată a termoelasticității liniare a plăcilor (engl., rez. rom.)	39
D. MANOLE, Existența și unicitatea soluției în teoria dinamică a viscoelasticității liniare micropolare (rom., rez. franc.)	47
I. NISTOR, Metode sistematice de aproximare în teoria neliniară a mediilor Cosserat (I) (engl., rez. rom.)	53
VALERIU AL. SAVA, Curgerea pulsantă a unei mixturi de două fluide incompresibile (engl., rez. rom.)	65
CORINA FETECĂU și C. FETECĂU, Asupra termodinamicii unor fluide simple asociate cu vizeza undelor finite (rom., rez. engl.)	69
FLORIN VITAN și RADU Z. TUDOSE, Curgerea lichidelor în filme subțiri. Instabilitatea valurilor (rom., rez. engl.)	75
CRISTIAN ZĂINESCU și RADU Z. TUDOSE, Curgerea lichidelor în filme subțiri. Lungimea de stabilizare (rom., rez. engl.)	85
D. I. ZOLER și C. D. CIUBOTARIU, Condițiile de rezonanță pentru interacțiunea neliniară între undele magnetohidrodinamice relativiste (engl., rez. rom.)	91
IRINA JEMNA, POMPILIU NICOLAU, HALINA NICULESCU, C. TĂNĂSOIU, EMILIA VĂRZARU și EMIL LUCA, Efectul ionilor de Nb și Li și a tratamentului termic asupra parametrilor piezoelectrics în materiale de tip PZT (franc., rez. rom.)	97
RECENZII	103

Section I

MECHANICS

CONTENTS

	Pag.
R. P. VOINEA, A. M. KRALL (U.S.A.), L. E. KRIVOSHEIN (U.S.S.R.), U. D'AMBROSIO (Brasil) and P. T. CRĂCIUNAȘ, Integral Equations Method in Studies Concerning certain Nonlinear Selfcontrolled Systems with Hereditary and Polywave or Polyvibrating Operators (English, Ro- manian summary)	7
SERGIU T. CHIRIACESCU and D. I. MANGERON, Controllability and Obser- vability of Linear Time Invariant Mechanical Systems (Romanian, English summary)	17
C. I. BORȘ, On the Thermodynamics of Nonlocal Continua (English, Romanian summary)	23
ELISABETA RUSU, Thermoelastic Vibrations of a Circular Cylinder in a New Theory of Thermoelasticity (English, Romanian summary)	29
GABRIELA SILVIA CIUMAȘU, Theorem of Compatibility and Uniqueness for the Equilibrium Solution of Dipolar Elastic Solid (English, Romanian summary)	35
I. IBĂNESCU, A Generalized Theory of Linear Thermoelasticity of Plates (English, Romanian summary)	39
D. MANOLE, L'existence et l'unicité de la solution dans la théorie dynamique de la viscoélasticité linéaire micropolaire (Romanian, French summary) I. NISTOR, Systematic Methods of Approximation in Nonlinear Theory of Cosserat Media (I) (English, Romanian summary)	47
VALERIU AL. SAVA, Pulsatile Flow of a Binary Mixture of Incompressible Fluids (English, Romanian summary)	53
CORINA FETECĂU and C. FETECĂU, On the Thermodynamics of some Simple Fluids Associated with Finite Wave Speeds (Romanian, English sum- mary)	65
FLORIN VITAN and RADU Z. TUDOSE, Liquids Flow in Thin Films. Waves Ins- tability (Romanian, English summary)	69
CRISTIAN ZĂINESCU and RADU Z. TUDOSE, Liquids Flow in Thin Films. The Stabilization Length (Romanian, English summary)	75
D. I. ZOLER and C. D. CIUBOTARIU, The Resonant Conditions for Nonlinear In- teraction between Relativistic Magnetohydrodynamic Waves (English, Romanian summary)	85
IRINA JEMNA, POMPILIU NICOLAU, HALINA NICULESCU, C. TĂNĂ- SOIU, EMILIA VĂRZARU et EMIL LUCA, Effet des ions de Nb et de Li et du traitement thermique sur les paramètres piézoélectriques des matériaux de type PZT (French, Romanian summary)	91
BOOK REVIEWS	97
	103

Секция I
МЕХАНИКА

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Р. П. ВОИНЯ, А. М. ЛРАЛЛ (США), Л. Е. КРИВОШЕИН (СССР), У. Д'АМБРОЗИО (Бразилия) и П. Т. КРЭЧЮНАШ, Метод интегральных уравнений в исследовании нелинейных автоконтрольных поливолновыми операторами (англ., рез. рум.)	7
С. Т. КИРЯЧЕСКУ и Д. И. МАНЖЕРОН, Контролируемость и наблюдаемость инвариантных линейных механических систем (рум., рез. англ.)	17
К. И. БОРИШ, О нелокальных сплошных сред (англ., рез. рум.)	23
ЭЛИСАБЕТА РУСУ, Термоупругие колебания кругового цилиндра в одном новой теории термоупругости (англ., рез. рум.)	29
ГАБРИЕЛА СИЛВИЯ ЧЮМАШУ, Теорема совместимости и единственности решения равновесия диполярного упругого тела (англ., рез. рум.)	35
И. ИВЭНЕСКУ, Обобщенная линейные теории термоупругость для пластинок (англ., рез. рум.)	34
Д. МАНОЛЕ, Существование и единственность решения а динамической линейной микрополярной вязкоупругости (рум., рез. франц.)	47
И. НИСТОР, Систематические методы приближений а нелинейной теории среды Коссера (англ., рез. рум.)	53
ВАЛЕРИУ АЛ. САВА, Пульсирующее течение двеккомпонентной несжимаемой жидкости (англ., рез. рум.)	65
КОРИНА ФЕТЕСКУ и К. ФЕТЕСКУ, О термодинамике некоторых простых жидкостей ассоциированные с конечной скоростью волн (рум., рез. англ.)	22
ФЛОРИН ВИТАН и РАДУ З. ТУДОСЕ, Течение жидкости а тонких слоях. Неустойчивость волн (рум., рез. англ.)	75
КРИСТИАН ЭЙНЕСКУ и РАДУ З. ТУДОСЕ, Течение жидкости в тонких слоях. Длина стабилизации (рум., рез. англ.)	85
Д. И. ЗОЛЕР и К. Д. ЧЮБОТАРЮ, Резонансные условиях для нелинейная взаимодействия между релятивистские магнетогидродинамические волны (англ., рез. рум.)	91
ИРИНА ЖЕМНА, ПОМПИЛЮ НИКОЛАУ, ХАЛИНА НИКУЛЕСКУ, К. ТЭНЭСОЮ, ЭМИЛИЯ ВЭРЗАНУ и ЭМИЛ ЛУКА, Эффект ионов Nb и Li и термические обработки для пьезоэлектрических параметров материалов типа ПЗТ (франц., рез. рум.)	97
РЕЦЕНЗИИ	103

INTEGRAL EQUATIONS METHOD IN STUDIES CONCERNING CERTAIN NONLINEAR SELFCONTROLLED SYSTEMS WITH HEREDITARY AND POLYWAVE OR POLYVIBRATING OPERATORS

BY

R. P. VOINEA, A. M. KRALL, L. E. KRIVOSHEIN, U. D'AMBROSIO

and P. T. CRĂCIUNĂȘ

The authors are pleased to devote this paper to the
Polytechnic Institute of Jassy

1. The quite recently obtained results concerning nonlinear Fredholm's alternative referred to nonlinear elliptic problems with jumping nonlinearities [47] and above all the interest given to *non classical boundary value problems* [1]—[9], first posed and partially solved more than fifty years ago by one of the authors in connection with his investigations concerning polywave or polyvibrating systems [10]—[13], frequently called [14]—[16], [46], „Mangeron Equations“, whose prototype is the generalized Sturm-Liouville equation

$$M_m^{(n)}[A(x)M_m^{(n)}u(x) + \lambda B(x)u(x)] + \lambda[B(x)M_m^{(n)}u(x) + C(x)u(x)] = 0,$$

$$(*) \quad u(x)|_{\partial R} = M_m^{(1)}[u(x)]|_{\partial R} = \dots = M_m^{(n-1)}[u(x)]|_{\partial R} = 0,$$

or one of its variational models, written here for $n=1$,

$$D[f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} A(x)[M_m^{(1)}f(x)]^2 dx, f(x)|_{\partial R} = 0,$$

$$I[f(x)] = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} [2B(x)f(x)M_m^{(1)}f(x) + C(x)f(x)^2] dx = 1;$$

(**)

$$I^*[f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} [2B(x)f(x)M_m^{(1)}f(x) + C(x)f(x)^2] dx,$$

$$D^*[f(x)] = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} A(x)[M_m^{(1)}f(x)]^2 dx = 1, \quad f(x)|_{\partial R} = 0$$

explains the authors' modern versatile approach to the solution of various problems on polywave or polyvibrating systems, which play an important role in certain multidimensional approximation of mapping processes, as for instance in the domain of automatic design of arbitrary form surfaces, [17]—[19], in the domain of spline approximation, [20], in studies of some phenomena of frequent occurrence in plasmas, [21] or [22]—[26].

The novelty of the indicated prototypes of polywave or polyvibrating systems consists in the fact that $M_m^{(n)} \equiv \partial^{mn} / \partial x_1^n \partial x_2^n \dots \partial x_m^n$, $n=1, 2, \dots$, is the operator of total n -th order differentiation in the sense of M. Picone, [27]—[28], $R = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, m\}$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $dx_1=dx_1 dx_2 \dots dx_m$, ∂R is the boundary of the parallelepiped R in m -dimensional Euclidean space R^m , and λ is a parameter whose particular sets of values give, as the case may be of „well posed“ in the J. Hadamard sense problems, the corresponding spectrums of eigenvalues and of the pertaining to them eigenfunctions.

Moreover, the equation (*) pertains also to the framework of the one of the authors unified theory of potential, wave- and heat propagation phenomena, [29], and is also the origin of M. Picone's polyharmonic, [30], M. Nicolescu's polycaloric, [31], and B. A. Bondarenko's polylinear, [32]—[33], systems, if the polyvibrating operator $M_m^{(n)}$ is substituted by

$$\Delta_m^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \right)^{(n)} \quad \text{or} \quad \Omega \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{m-1}^2} - \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{(n)},$$

or $K_{m,p}^{(n)} \equiv (M_m^{(1)} - L_p)^{(n)}$, respectively, L_p being a linear differential operator in another set of variables, say, $y=(y_1, y_2, \dots, y_p)$ and $D_m^{(1)} \equiv M_m^{(1)}$ one of the former ones.

2. In the framework of our studies concerning differential systems of complex structures, [34]—[37], one exposes in what follows existence, uniqueness, approximate solutions together with errors valuation determination, and stability theorems, using an integral equations method for a class of nonlinear systems with hereditary and polywave or polyvibrating operators whose prototype is given by the integrodifferential system with self-control and multiple integrals

$$\begin{aligned} & r(x, M_2^{(2)}[u]) \\ & M_2^{(2)}[u(x, t)] = f \left[x, t, u(x, t), M_2^{(1)}[u(x, t)], \int_a^\infty d\xi \times \right. \\ (1) & \left. s(t, M_2^{(1)}[u]) \right. \\ & \times \left. \int_a^\infty N(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau), u'_\xi(\xi, \tau), u'_\tau(\xi, \tau), M_2^{(1)}[u(\xi, \tau)]) d\tau \right], \\ (2) & u_i^{(i)}(x, \alpha) = \varphi_i(x), u_x^{(i)}(a, t) = \psi_i(t), (i=0, 1), \\ (3) & q_i = \varphi_i^{(i)}(a) = \psi_i^{(i)}(\alpha) = \text{const.}, i=(0, 1, 2), \end{aligned}$$

where

$$r(x, M_2^{(2)}[u]) \equiv r \left[x, \int_{\alpha}^{\gamma} (P(x, \tau, M_2^{(2)}[u(x, \tau)]) d\tau \right],$$

$$s(t, M_2^{(1)}[u]) \equiv s \left[t, \int_a^b Q(t, y, M_2^{(1)}[u(\eta, t)]) d\eta \right],$$

$f(x, t, l_1, l_2, l_3)$, $N(x, t, \xi, \tau, l_4, l_5, l_6, l_7)$, $r(x, l_8)$, $P(x, \tau, l_9)$, $s(t, l_{10})$, $Q(t, \eta, l_{11})$ are given functions, continuous with respect to all their arguments in the domains

$$D_1 = D \times [a_i \leq l_i \leq b_i, i=1, 2, 3]; D = [a \leq x \leq b] \times [\alpha \leq t \leq \gamma];$$

$$D_2 = D \times [a \leq \xi \leq r(x, l_8) \leq b] \times [\alpha \leq \tau \leq s(t, l_{10}) \leq \gamma] \times [a_i \leq l_i \leq b_i], i=4, 7;$$

$$D_3 = [a \leq x \leq b] \times [a_8 \leq l_8 \leq b_8], D_4 = [a \leq x \leq b] \times [\alpha \leq \tau \leq \gamma] \times [a_9 \leq l_9 \leq b_9];$$

$$D_5 = [\alpha \leq t \leq \gamma] \times [a_{10} \leq l_{10} \leq b_{10}]; D_6 = [\alpha \leq t \leq \gamma] \times [a \leq \eta \leq b] \times [a_{11} \leq l_{11} \leq b_{11}],$$

respectively. All these functions satisfy in their domains of definitions the Lipschitz conditions with respect to l_i , $i=1, 2, \dots, 11$, with continuous and non negative coefficients $L_{if}(x, t)$, $i=1, 2, 3$; $L_{iN}(x, t)$, $i=1, 4$; $L_r(x)$, $L_p(x, \tau)$, $L_s(t)$ and $L_Q(t, \eta)$, respectively. Moreover, $a_i, b_i, i=1, 11$ are constants, $\max |l_i| \leq r_i = \text{const}$, and $\varphi_i(x)$ and $\psi_i(t)$ are given continuous functions in the domains $[a, b]$ and $[\alpha, \gamma]$, respectively, and possess in these domains continuous derivatives of order i , $i=1, 2$.

Our integral equations method consists in the use of the following system of integral equations

$$(4) \quad u(x, t) = \varphi_0(x) + \psi_0(t) - q_0 + [\varphi_1(x) - \varphi_1(a)](t - \alpha) + [\psi_1(t) - \psi_1(\alpha)](x - a) - \\ - q_1(x - a)(t - \alpha) + \int_a^x \int_{\alpha}^t (x - \eta)(t - \theta) v(\eta, \theta) d\theta d\eta \equiv A[v]$$

and

$$(5) \quad v(x, t) = f \left[x, t, A[v(x, t)], M_2^{(1)}[A[v(x, t)]], \int_a^{r(x, v)} d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_a^{s(t, M_2^{(1)}[A[v]])} N(x, t, \xi, \tau, A[v], A'_\xi[v], A'_\tau[v], M_2^{(1)}[A[v]]) d\tau \right] \equiv H[v].$$

In view to solve the existence and the uniqueness problem of the initial integro-differential system (1)–(3), let us suppose that the nonlinear operators $A[\cdot]$ and $H[\cdot]$ transform the functional classes $C^{2,2}(D)$ and $C(D)$, respectively, into themselves. Therefore, if the inequality

$$(6) \quad k = \|H\| < 1$$

holds, where $\|\cdot\| = \max_D |\cdot|$, one obtains the following

Theorem 1. *If the over mentioned constraints concerning the non-linear operators $A[\cdot]$ and $H[\cdot]$ are valid and if the inequality (6) holds, the integro-differential system (1)–(3) does possess a unique solution $u = u(x, t) \in C^{2,2}(D)$ and it is effectively obtained as the limit of the convergent set $\{u_i(x, t)\}_0^\infty$, where*

$$(6_1) \quad u_i(x, t) = A[v_i], \quad (7) \quad v_{i+1}(x, t) = H[v_i],$$

while the errors valuation is expressed by the inequalities

$$(7_1) \quad \begin{aligned} & \|u(x, t) - u_i(x, t)\| \leq \\ & \leq [(x-a)(t-\alpha) : 2]^{2k} \|v_0(x, t) - H[v_0]\| : (1-k) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \\ & i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

3. Clearly, one can obtain approximate solutions of the system (1)–(3) by using various other methods. Let us expose here very briefly the method of determination of the approximate solutions of $u(x, t)$ by means of the following procedure :

$$(8) \quad u_i(x, t) = A[w_i],$$

$$(9) \quad w_i(x, t) = H[w_{i-1} + R_1[r_{i-1}]] + R_2[r_{i-1}] + G[w_i - w_{i-1}],$$

where

$$R_j[r_{i-1}] \equiv \sigma_j(x, t) r_{i-1}(x, t) + E_j[r_{i-1}], \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$r_{i-1} \equiv w_{i-1} - H[w_{i-1}],$$

while $\sigma_j(x, t)$ is a given continuous function in D , $E_j[\cdot]$ is a given continuous functional in D , and $G[\cdot]$ is a linear functional chosen in such a way that $\|1 - G\| \neq 0$.

Let us establish conditions of convergence toward $v(x, t)$ of the infinite set $\{w_i(x, t)\}_0^\infty$. From (9) one gets

$$(1-G)(w_i - w_{i-1}) = H[w_{i-1} + R_1[r_{i-1}]] + R_2[r_{i-1}] - w_{i-1},$$

and therefore,

$$\begin{aligned} w_i - w_{i-1} = (1-G)^{-1} \{ & H[w_{i-1} + R_1[r_{i-1}]] + R_2[r_{i-1}] - H[w_{i-2} + R_1[r_{i-2}]] - \\ & - R_2[r_{i-2}] - G[w_{i-1} - w_{i-2}] \} \end{aligned}$$

and subsequently one obtains the set of inequalities

$$(10) \quad \begin{aligned} & \|w_i - w_{i-1}\| \leq \|(1-G)^{-1}\| \{ k[1 + \|R_1\|(1+k)] + \|R_2\|(1+k) + \\ & + \|G\| \|w_{i-1} - w_{i-2}\| \} \equiv \lambda \|w_{i-1} - w_{i-2}\| \leq \dots \leq \lambda^{i-1} \|w_1 - w_0\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

valid for the appropriate choosing of over mentioned functions and operators if and only if

$$k[1 + \|R_1\|(1+k)] + \|R_2\|(1+k) + \|G\| \equiv \lambda < 1.$$

One finds analogously

$$(11) \quad \|v - w_i\| \leq \lambda^i \|v - w_0\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Accordingly, the set of functions (8) gives

$$(12) \quad \|u(x, t) - u_i(x, t)\| \leq [(x - a)(t - \alpha) : 2]^{2\lambda^i} \|v - w_0\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

and subsequently, taking into account (6), one obtains

$$(13) \quad \begin{aligned} & \|u(x, t) - u_i(x, t)\| \leq [(x - a)(t - \alpha) : 2]^{2\lambda^i} \|R_0(x, t)\| : (1 - k), \\ & R_0(x, t) \equiv w_0(x, t) - H[w_0], \quad \forall (x, t) \in D. \end{aligned}$$

Remarks. 1. In correspondence with various particular cases of our approximation approach, it is possible to take in (9) :

1) $R_1[\cdot] \neq 0, R_2[\cdot] \equiv 0$ or 2) $R_1[\cdot] \equiv 0, R_2[\cdot] \neq 0$.

2. Similar to 1, requirements can be put on the triad of the functionals $R_1[\cdot]$, $R_2[\cdot]$, and $G[\cdot]$.

4. Let us consider now the following perturbed system

$$(14) \quad \begin{aligned} & M_2^{(2)}[y(x, t)] = f\left[x, t, y(x, t), M_2^{(1)}[y(x, t)], \int_a^{\mu(x, M_2^{(2)}[y])} d\xi \times \right. \\ & \left. \times \int_{\sigma(t, M_2^{(1)}[y])}^\alpha N(x, t, \xi, \tau, y(\xi, \tau), y'_\tau(\xi, \tau), y'_\tau(\xi, \tau), M_2^{(1)}[y(\xi, \tau)]) d\tau\right], \end{aligned}$$

$$(15) \quad y_i^{(i)}(x, \alpha) = \varphi_i(x), \quad y_i^{(i)}(a, t) = \psi_i(t), \quad (i = 0, 1),$$

$$(16) \equiv (3) \quad \varphi_i^{(i)}(a) = \psi_i(a) = q_i = \text{const.} \quad (i = 0, 1, 2),$$

where the introduced perturbations are given by

$$\begin{aligned} \mu(x, M_2^{(2)}[y]) &\equiv \mu\left[x, \int_a^\gamma P(x, \theta, M_2^{(2)}[y]) d\theta\right], \\ \sigma(t, M_2^{(1)}[y]) &\equiv \sigma\left[t, \int_a^b Q(t, \eta, M_2^{(1)}[y]) d\eta\right] \end{aligned}$$

and are such that

$$|r(x, l_8) - \mu(x, l_{12})| \leq \lambda_1(x)t + \lambda_2(x)|l_8 - l_{12}|,$$

$$|s(t, l_{10}) - \sigma(t, l_{14})| \leq \lambda_3(t) + \lambda_4(t)|l_{10} - l_{14}|,$$

$P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ and $\lambda_i(\cdot)$ being given continuous functions of their arguments and $a_8 \leq l_{12} \leq b_8$, $a_{10} \leq l_{14} \leq b_{10}$. Using our integral equations method, one consi-

ders instead of the perturbed system (14)–(16) the following integral equations system

$$(17) \quad y(x, t) = A[z]$$

and

$$(18) \quad \begin{aligned} z(x, t) = & f \left[x, t, A[z(x, t)], M_2^{(1)}[A[z(x, t)]], \int_a^{\mu(x, z)} d\xi \times \right. \\ & \left. \times \int_{\alpha} N(x, t, \xi, \tau, A[z], A'_\xi[z], A'_\tau[z], M_2^{(1)}[A[z]]) d\tau \right] \equiv E[z]. \end{aligned}$$

Taking into account the set of restrictions, strictly analogous to the previous ones concerning the nonlinear operators $A[\cdot]$ and $H[\cdot]$, imposed on the operators $A[\cdot]$ and $E[\cdot]$, from (17) and (18) one obtains, if the inequality

$$(19) \quad k_1 = \|E\| < 1$$

holds, the following

Theorem 2. *If the over mentioned constraints are valid, the perturbed system (14)–(16) does possess a unique solution $y(x, t) \in C^{2,2}(D)$ and this solution can be constructed with the desired approximation using the similar methods exposed in solving the previous problem (1)–(3).*

Further, from the integral equations (5) and (18) one obtains

$$(20) \quad \|v(x, t) - z(x, t)\| \leq \beta_1 + \beta_2 \|v(x, t) - z(x, t)\|$$

and therefore, for $\beta_2 < 1$, one gets

$$(21) \quad \|v(x, t) - z(x, t)\| \leq \beta_1 : (1 - \beta_2) \equiv \delta,$$

where β_1 , β_2 , and δ are given positive numbers.

Finally, the desired stability of the solution $u(x, t)$ of the initially considered system (1)–(3) with respect to the perturbations of the limits of its integrals as referred above is assured by the following inequality

$$(22) \quad |u(x, t) - y(x, t)| \leq [(x - a)(t - \alpha) : 2]^2 \delta.$$

Remarks. 3. Clearly, studies of the existence and uniqueness of the solutions of various integro-differential systems, no matter if the corresponding differential operators are ordinary, polyharmonic, polycaloric or polyvibrating, or, in particular, potential (elliptic), heat (parabolic) or wave propagation (hyperbolic) operators, can be successfully achieved by using the fixed point Banach or other more recent principles. Of course, it will be necessary to pay attention to the choosing of norm definition. For instance, the following nonlinear polyvibrating integro-differential system with selfcontrols in the limits of integrals

$$M_2^{(2)}[u(x, t)] = f \left[x, t, u(x, t), M_2^{(1)}[u(x, t)], \int_a^{r(x, u_x')} d\xi \times \right.$$

$$(23) \quad s(t, u'_t) \times \int K(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau), M_2^{(1)}[u(\xi, \tau)] d\tau,$$

$$(24) \quad u_i^{(i)}(x, \alpha) = \varphi_i(x), \quad u_x^{(i)}(a, t) = \psi_i(t), \quad (i=0, 1),$$

$$(25) \quad \varphi_i^{(i)}(a) = \psi_i^{(i)}(\alpha) = p_i = \text{const.}, \quad (i=0, 1, 2),$$

where

$$r(x, u'_x) \equiv r \left[x, \int_{\alpha}^{\gamma} P(x, \tau, u'_x(x, \tau)) d\tau \right],$$

$$s(t, u'_t) \equiv s \left[t, \int_a^b Q(\xi, t, u'_t(\xi, t)) d\xi \right]$$

can be studied by dealing with the Banach principle, while all other suppositions in the corresponding domains concerning the given functions are similar with these previously exposed, if one takes, instead of Petrovsky and other definition $\|\cdot\| = \max \|\cdot\|$, the norm defined as follows

$$\|u(x, t)\| = \max_D |u| + \max_D |u'_x| + \max_D |u'_t| + \max_D |M_2^{(1)}[u]|,$$

$$D = [a \leq x \leq b] \times [\alpha \leq t \leq \gamma].$$

4. Obviously, there is a lot of nowadays open problems concerning the generalized solubility of *non classical boundary value problems*, as for instance, the smoothness of generalized solutions, the establishment of energetic inequalities, [38].

5. It would be also of interest to discuss and establish various other sets of existence, uniqueness, approximate solutions and valuation of the committed errors theorems, as well as to examine stability problems, taking into account, in the framework of the modern functional analysis approach, [39]—[40], instead of the adopted constraints some other less restrictive ones, concerning the over encountered nonlinear operators.

Moreover, there are recently found nonlinear mathematical models of such a complexity [45], that existence and uniqueness theorems concerned with were not established until today (see also [41]—[44]).

Received August 25, 1981

Academy of the Socialist Republic of
Romania, Polytechnic Institute of Jassy,
Kirgizian State University, Frunze,
U.S.S.R.

and
American State Organization Center of
Mathematical Education, Campinas,
Brasil

REFERENCES

1. Rosenblatt A., *Sur les problèmes à la frontière pour certains équations aux dérivées partielles (considérées par M. D Mangeron)*. C. r. Acad.; Sci., Paris, 198, 1278—1280 (1933).
2. Salvadori M., *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 5, 51—72 (1936).
3. Stampacchia G., *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*. Giorn. Mat., (4) 78, 81—96 (1948).

4. Poli L., Delerue P., *Calcul symbolique à deux variables*. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
5. Manaresi F., *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di un problema al contorno con caratteristiche reali doppie* (di Mangeron). Red. Sem. Mat. Univ. Padova, 23, 163—213 (1954).
6. Krivoshein L. E., Kutanov A., Leung K. V., Oguztoreli M. N., *Problèmes à la frontière aux conditions initiales fonctionnelles pour une classe d'équations intégrodifférentielles de Mangeron*. Bull. Soc. Math. Belg., 27, 157—165 (1975).
7. Easwaran S., *A Study on certain Higher Order Partial Differential Equations of Mangeron*. Doctoral Dissertation, Dept. of Math., Univ. of Alberta, 1972.
8. Oguztoreli M. N., Leung K. V., Krivoshein L. E., *Problèmes concernant différentes classes d'équations intégrodifférentielles non linéaires de Mangeron*. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat., naturali, (8) 56, 151—156 (1974).
9. Leung K. V., Oguztoreli M. N., *Numerical Solution of a Mixed Problem for a Polywave Equation of Mangeron*. Collectanea Math., Sem. Mat. Barcelona, 25, 3 3111 (1974).
10. Mangeron D., *Sopra un problema al contorno non lineare per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat., nat., (6) 16, 305—310 (1932).
11. Mangeron D., *Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, (4) 2, 29—40 (1932).
12. Mangeron D., *Sopra una nuova classe di problemi al contorno*. Giorn. Mat., 71, 89—139 (1933).
13. Mangeron D., *Problèmes concernant les équations polyvibrantes*. C. r. Acad. Sci., Paris, 266A, 870—873; 976—979 (1968); 204, 94—96; 544—546; 1022—1024 (1937).
14. Oguztoreli M. N., *Sur le problème de Goursat pour une équation de Mangeron d'ordre supérieur* (II). Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci., (5) 56, 5, 577—582 (1972).
15. Easwaran S., *Mangeron's Polyvibrating Operators and their Eigenvalues*. Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci., (5) 59, 1011—1015 (1973).
16. Rossi F. S., *Sul metodo di Mangeron concernante certi sistemi non lineari alle derivate parziali*. Bul. Inst. polit. Iasi, IX (XIII), 3—4, 55—60 (1963).
17. Gordon W., *Automatic Design of Free Form Surfaces*. General Motors Research Papers Series, Warren, Michigan, 1968.
18. Birkhoff G., Gordon W., *On the Draftsman's and Related Equations*. J. Approx. Theory, 1, 199—208 (1968).
19. Nielson G. M., *A Mangeron Type Theorem for a Triangular Domain*. SIAM 1976 Fall Meeting, Georgia Inst. Techn., Atlanta, Georgia, Oct. 1976, pp. 18—20.
20. Birkhoff G., Gordon W., *Proceedings Conference of Spline Approximation*. Academic Press, 1969.
21. Oguztoreli M. N., *Electrostatic Oscillations in Cold Inhomogeneous Plasmas with Compact Support*. Plasma Physics, 18, 1, 41—50 (1976).
22. Mangeron D., Krivoshein L. E., *Problemi concernenti sistemi di equazioni integro-differenziali con operatori polivibranti*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33, 226—266 (1963); 34, 344—368 (1964); 35, 341—364 (1965).
23. Mangeron D., Krivoshein L. E., *New Methods of Numerical Calculation of Various Integro-differential Systems* (I), (II), (III). Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., 9, 1195—1221 (1964); 10, 3—34 (1965); 11, 733—756 (1966).
24. Кривошейн Л. Е., *Некоторые задачи по исследованию интегро-дифференциальных уравнений*. Тр. II Сибирской конф. мат. и мех., Томск, 1964, стр. 27—35.
25. Oguztoreli M. N., Stein B. R., *The Effects of Multiple Reflex Pathways on the Oscillations in Neuromuscular Systems*. Springer-Verlag, 1976, pp. 87—101.
26. Leung K. V., Mangeron D., Oguztoreli M. N., Stein B. R., *On the Stability and Numerical Solutions of two Neural Models*. Utilitas Mathematica, Winnipeg, Canada, 5, 167—212 (1974). See also *Improved Neuronal Models for Studying Neural Networks*, Kybernetik, 14, 1—9 (1974).
27. Picone M., *Biografie e Bibliografie degli Accademici Lincei*. Accad. Naz. Lincei, Roma, 1976, pp. 491—505.
28. Mangeron D., *Théorie unitaire des équation polyharmoniques, polycaloriques et polyvibrantes*. Travaux du IV-e Congrès des Math. Roumains, Bucharest, Vol. IV, 1956, pp. 18—27.

29. Picone M., *Sulle funzioni metaarmoniche*. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat., nat., (6) 5, 90–95 (1927).
30. Nicolescu M., *Ecuatia iterată a căldurii*. Studii și Cerc. Mat., Buc., 3–4, 243–332 (1954).
31. Bondarenko B. A., Leung K. V., Mangeron D. J., Oguztoreli M. N., *Studii concernenti le equazioni polilineari*. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, (4) 44, 1977 (1978). Alla Memoria di MAURO PICONE, pp. 286–291.
32. Bondarenko B. A., Leung K. V., Mangeron D., Oguztoreli M. N., *Operational Representation of Solutions of a Class of Polylinear Equations*. Notices Amer. Math. Soc., Febr. 1977, A-244.
33. Б. А. Бондаренко, *Полигармонические полиномы*. Изд. ФАН, Узб. ССР, Ташкент, 1968.
34. Mangeron D., Oguztoreli M. N., *On the Construction of Polywave Polynomials*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 208, 4 (1973); Soviet Math. Dokl., 14, 1, 176–181 (1973).
35. Krivoshein L. E., Leung K. V., Mangeron D., Oguztoreli M. N., *Étude de certains systèmes intégrodifférentiels non linéaires*. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, (4) 44, 359–366 (1977–1978).
36. Mangeron D., *Applications of Polywave or Polyvibrating Equations*. Mem. Sec. șt. ale Acad. R.S.R., I (1977–1978).
37. Кривошеин Л. Е., Кутанов А., Манжерон Д., Огузторели М. Н., *Исследования нелинейных интегро-дифференциальных систем с авторегулированием в пределах интегрирования, обобщающих математические модель бифуркационного подъема*. Украин. мат. Ж., 29, 3, 392–397 (1977).
38. Berezanskii Yu. M., *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*. Amer. Math. Soc. Transl. Monographs, 1968, Ch. IV and Addenda.
39. D'Ambrosio U., *On Limit Boundaries of Generalized Surfaces*. Boll. Un. Mat. Ital., (4) 11, 610–615 (1975).
40. Fernandez D., *Interpolation of Banach Spaces*. Studia Math., 60 (1978).
41. Picone M., in *Duodecim doctorum virorum vitae & operum notitia*. Academia Pontificia dei Lincei, Città del Vaticano, MCLXX.
42. Mangeron D., Oguztoreli M. N., *Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti*. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. fis., mat., nat., (8) XLIV, 5, 625–632 (1968).
43. Salmanov D. Yu., *The Sturm-Liouville Problem for a General Linear Differential Equation*. Diff. Uravnenia, 1, 10, 1321–1337 (1965).
44. Lizorkin P. I., Nikolskii S. M., *A Classification of Differentiable Functions in some Fundamental Spaces with Dominant Mixed Derivative*. Mat. Sb. and Trudy Mat. Inst. Steklov, 160–187 (1975); see also S. M. Nikolskii, *A Variational Problem*, Tr. Mat. Inst. Steklov, 132–154 (1964).
45. Samarskii A. A., *Numerical Methods in Plasma Physics*. Lect. Notes Phys., 91, 235–247 (1979).
46. Delvos F. J., Schäfer W., *The Operator of Surface Interpolation*. J. Approx. Th., 21, 293–302 (1977).
47. Ruf B. H., *Eine nichtlineare Fredholm-Alternative*. Inaugural-Dissertation, Universität Zürich, 1980.
48. Mangeron D., *Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics*. The IUTAM Conference on Nonlinear Vibrations, Kiev, Vol II, 1961.

METODA ECUAȚIILOR INTEGRALE ÎN STUDIUL SISTEMELOR CU AUTOCONTROL ȘI CU OPERATORI EREDITARI ȘI POLIVIBRANȚI

(Rezumat)

Se prezintă teoreme de existență, unicitate, de determinare a soluțiilor aproximative și de evaluare a erorilor comise referitoare la o clasă de sisteme neliniare cu autocontrol și cu operatori ereditari și polivibranți. Se expune apoi o problemă de stabilitate și o nouă metodă de construcție a soluțiilor aproximative.

CONTROLABILITATEA ȘI OBSERVABILITATEA SISTEMELOR MECANICE LINIARE INVARIANTE ÎN TIMP

DE

SERGIU T. CHIRIACESCU și D. I. MANGERON

1. Introducere. Teoria sistemelor dinamice [4], [10] etc. oferă o serie de metode și tehnici de calcul de maximă generalitate. În particular, cu ajutorul lor și folosind calculatoarele electronice, problemele de bază care apar în studiul sistemelor dinamice mari liniare invariante în timp își găsesc rezolvări complete, nu numai de principiu (așa cum se întâmpla pînă în urmă cu cîteva ani).

Sistemele mecanice pot fi privite ca sisteme dinamice particulare [1], [3] etc. În acest caz apare ca firească completarea Teoriei vibrațiilor mecanice cu o serie de concepte de bază și metode de investigație proprii Teoriei sistemelor. În această direcție de cercetare se înscriu numeroase lucrări [1], [9] etc.

În ultimii zece ani autorii au analizat cîteva probleme fundamentale din Teoria sistemelor mecanice liniare invariante în timp, cum ar fi reprezentarea în spațiul stărilor, decuplarea ieșirilor [1], [7] și, pe baza unor criterii originale prezentate în lucrarea [2], controlabilitatea și observabilitatea modelului Kelvin n -dimensional [6].

Cu referire la sistemul mecanic liniar multidimensional cu amortizare vîscoasă, aceste ultime două concepte fac obiectul lucrării de față.

2. Criterii de controlabilitate și de observabilitate. Fie sistemul mecanic n -dimensional descris de ecuația

$$(1) \quad M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F,$$

în care y și $F = F(t)$ sînt matrice nesingulare reale (cu elemente reale) de tipul $(n, 1)$, M , C și K matrice de tipul (n, n) , iar prin t s-a notat timpul.

Aligînd drept stare a sistemului vectorul de fază

$$(2) \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_{2n}]^T = [y, \dot{y}]^T = [y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n]^T$$

(1) conduce la ecuațiile de stare

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + BF, \\ y = Dx, \end{cases}$$

în care

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \quad D = [E, 0].$$



Controlabilitatea în spațiul stărilor condiționează trecerea sistemului, acționînd numai asupra intrării F , din starea x_0 (corespunzătoare timpului t_0) în starea x_1 (corespunzătoare timpului t_1). La rîndul ei, observabilitatea stabilește condițiile în care poate fi determinată starea x_0 a sistemului numai prin „observarea” ieșirii y într-un timp suficient de lung.

În Teoria sistemelor dinamice [4], [10] etc. sînt prezentate cîteva modalități de testare a controlabilității și observabilității în spațiul stărilor. Spre exemplu, în lucrarea [4] se arată că un sistem dinamic de tipul (3) este complet controlabil dacă liniile matricei $\Phi = e^{At}B$ sînt liniar independente și este complet observabil atunci cînd coloanele matricei $\bar{\Phi} = De^{At}$ sînt liniar independente.

Folosind rezultatele generale din lucrarea [2], în cele ce urmează sînt prezentate cîteva criterii de controlabilitate și de observabilitate care pot fi utilizate în cazurile în care matricea de evoluție A a sistemului mecanic liniar invariant în timp are numai valori proprii simple.

Teorema 1. *Fie*

$$(5) \quad \Delta(\lambda) = |E\lambda - A| = \prod_{i=1}^{2n} (\lambda - \lambda_i)$$

polinomul caracteristic al matricei A și $\varphi_i(\lambda)$ ($i = \overline{1, 2n}$) liniile matricei $\text{adj}[E\lambda - A]B$. Sistemul descris de ecuațiile (3) este complet controlabil dacă

$$(6) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda_1) & \varphi_2(\lambda_2) & \dots & \varphi_{2n}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\lambda_{2n}) & \varphi_2(\lambda_{2n}) & \dots & \varphi_{2n}(\lambda_{2n}) \end{bmatrix} = 2n.$$

Demonstrație. Cunoscuta formulă a lui Cauchy permite a scrie [8]

$$(7) \quad e^{At} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} e^{\lambda t} [E\lambda - A]^{-1} d\lambda,$$

unde $j = \sqrt{-1}$, iar Γ este un contur simplu închis, orientat pozitiv, care conține toate valorile proprii ale matricei A .

Ținînd seama de (7) matricea Φ poate fi pusă în forma

$$(8) \quad \begin{aligned} \Phi = e^{At}B &= [\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_{2n}]^T = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} e^{\lambda t} \frac{[\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{2n}]^T}{\Delta(\lambda)} d\lambda = \\ &= \text{rez} \left\{ e^{\lambda t} \frac{[\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{2n}]^T}{\Delta(\lambda)} \right\}. \end{aligned}$$

Așa cum s-a arătat mai sus, sistemele de tipul (3) sînt complet controlabile dacă liniile matricei Φ sînt liniar independente. În baza relațiilor (8) aceasta înseamnă că ecuația

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \Phi_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

trebuie să fie satisfăcută numai atunci când $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1, 2n}$).

Cu notațiile din (8) ecuația (9) conduce la sistemul omogen de ecuații avînd ca necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \varphi_i(\lambda_r) = 0, \quad r = \overline{1, 2n}.$$

Pentru ca (10) să admită soluțiile banale $\alpha = 0, \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{2n} = 0$ este necesar și suficient să fie satisfăcută condiția (6), ceea ce demonstrează Teorema 1.

Cu transformarea liniară nesingulară

$$(11) \quad x = T\bar{x}$$

ecuațiile (3) devin

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}F, \\ y = \bar{D}\bar{x}, \end{cases}$$

unde $\bar{A} = T^{-1}AT$, $\bar{B} = TB$, $\bar{D} = DT$.

Folosind una din metodele oferite de Teoria sistemelor, matricea $\bar{A}$ poate căpăta diverse forme particulare: superior sau inferior triunghiulară, Jordan, diagonală etc.

După cum este cunoscut [3], [8], pentru două matrice asemenea, așa cum sînt A și $\bar{A}$, valorile proprii coincid. Rezultă de aici posibilitatea studierii controlabilității sistemului mecanic descris de ecuația (1) cu ajutorul matricei $\bar{A}$ de formă particulară. Astfel, dacă (5) este polinomul caracteristic al matricei $\bar{A}$ superior sau inferior triunghiulară atunci se poate arăta că criteriul (6) se reduce la

$$(13) \quad \varphi_i(\lambda_i) \neq 0, \quad (i = \overline{1, 2n}).$$

Procedînd în maniera indicată în lucrarea [2] și notînd cu $\bar{B}_i$ liniile matricei de comandă $\bar{B}$ se ajunge la concluzia că în cazul în care $\bar{A}$ este o matrice Jordan controlabilitatea sistemului mecanic considerat este condiționată de satisfacerea ecuațiilor

$$(14) \quad \bar{B}_i \neq 0, \quad (i = \overline{1, 2n})$$

stabilite pe o altă cale și în [9].

Parcînd o cale similară cu aceea care a condus la Teorema 1 poate fi demonstrată

Teorema 2. Fie $\Delta(\lambda)$ dat de (5) polinomul caracteristic al matricei de evoluție A și φ_i ($i = \overline{1, 2n}$) coloanele matricei $\text{Dadj}[E\lambda - A]$. Sistemul mecanic descris de ecuațiile (3) este complet controlabil dacă

$$(15) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(\lambda_1) & \bar{\varphi}_2(\lambda_1) & \dots & \bar{\varphi}_{2n}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\varphi}_1(\lambda_{2n}) & \bar{\varphi}_2(\lambda_{2n}) & \dots & \bar{\varphi}_{2n}(\lambda_{2n}) \end{bmatrix} = 2n.$$

Presupunînd că prin transformarea (11) ecuațiile de stare au căpătat forma (12), în care matricea $\bar{A}$ este superior sau inferior triunghiulară, criteriul (15) se înlocuiește cu

$$(16) \quad \bar{\varphi}_i(\lambda_i) \neq 0, \quad (i = \overline{1, 2n}).$$

În situațiile destul de frecvente [9] în care matricea $\bar{A}$ capătă o formă Jordan, observabilitatea completă a sistemului mecanic liniar invariant în timp impune satisfacerea ecuațiilor

$$(17) \quad \bar{D}_i \neq 0,$$

în care $\bar{D}_i$ ($i = \overline{1, 2n}$) sînt liniile matricei $\bar{D}$.

3. Concluzii. Deși există cîteva criterii generale de controlabilitate și observabilitate în spațiul stărilor [4], [10] etc., adaptarea lor sau formularea altora proprii sistemelor mecanice prezintă un real interes practic. În [6] sînt stabilite criteriile aplicabile modelului Kelvin generalizat, în cea de față conceptele sînt privite la nivelul unui sistem mecanic oarecare cu amortizare vîscoasă descris prin ecuațiile (3) sau (12), problema rămînînd, desigur, deschisă.

Criteriile de controlabilitate și de observabilitate sînt indispensabile în abordarea și rezolvarea corectă a unor importante probleme care apar în analiza și/sau sinteza sistemelor mecanice mari. De exemplu, în [1] ele au fost folosite în studiul stabilității asimptotice și la obținerea răspunsului y al sistemului descris de ecuația (1), iar, cu totul recent, în [9] ele au stat la baza rezolvării importante probleme a identificării parametrilor sistemului.

Primită la 1 februarie 1981

Universitatea din Brașov

și

Institutul politehnic, Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Chiriacescu S. T., Huiu C., Mangeron D., *Concepte ale „Teoriei sistemelor” în studiul sistemelor mecanice liniare.* St. și Cerc. Mec. Apl., 36, 3, 335–350 (1977).
2. Chiriacescu S. T., Mangeron D., *Criterii pentru controlabilitatea și observabilitatea sistemelor liniare invariante în timp.* E.E.A., Electronica, 26, 4, 135–137 (1978).
3. Chiriacescu S. T., *Vibrații în construcția de mașini.* Universitatea din Brașov, 1982.
4. Fossard A., Gueguen C., *Comande des systèmes multidimensionnels.* Dunod, Paris, 1972.
5. Гантмахер Ф. П., *Теория матриц.* Изд. „Наука”, М., 1966.
6. Mangeron D. I., Chiriacescu S. T., *Controlabilitatea și observabilitatea sistemului Kelvin.* Bul. Univ. din Brașov, Ser. A/I, XVI, 1–10 (1974).
7. Mangeron D. I., Chiriacescu S. T., *Reprezentarea intrare-stare-ieșire în Teoria vibrațiilor sistemelor liniare.* Buletinul conferinței „Vibrații în construcția de mașini”, Inst., polit. Timișoara, pp. 279–286, 1975.

8. Rezza F., *Spații liniare*. Ed. did. și ped., Buc., 1973.
9. Udwadia F. E., *Controllability, Observability and Identification of Classical Linear Dynamic Systems*. SM Archives, 6, Issue 2, 193—211 (1981).
10. Zadeh L., Polak E., *Teoria sistemelor* (trad. din l. engleză). Ed. tehn., Buc., 1973.

CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF LINEAR TIME INVARIANT MECHANICAL SYSTEMS

(Summary)

In this paper some criteria of controllability and observability of the linear, viscously damped mechanical system are established. These criteria can be used for systems with distinct eigenvalues of the matrix of evolution.

8. Rozsa, F., *Space Systems*, Vol. 2, Part 2, 1973.
9. Udwadia, F. B., *Controllability, Observability and Identification of Classical Linear Dynamic Systems*, *SIAM Archives*, 6, Issue 2, 193-211 (1981).
10. Xabon, L., Polak, E., *Linear Systems* (Trans. Am. Inst. Engngs), Ed. John, Inc., 1973.

CONTROLABILITY AND OBSERVABILITY OF LINEAR TIME INVARIANT MECHANICAL SYSTEMS

(Summary)

In this paper some criteria of controllability and observability of the linear, viscously damped mechanical system are established. These criteria can be used for systems with distinct eigenvalues of the matrix of evolution.

ON THE THERMODYNAMICS OF NONLOCAL CONTINUA

BY

C. I. BORȘ

During the last decade the researches in the nonlocal elasticity were largely developed. Many points of view and many papers appeared in the scientific literature. Among these we quote the works of Kröner [1], Kunin [2], Rogula [3], Eringen [4], Edelen [5], Green and Naghdi [6].

In the papers [7], [8], [9] a new attempt to derive the equations of motion for a nonlocal continuum was given.

In brief our point of view is at it follows: The external influences which a body may receive from the exterior are represented by surface tractions and surface couples, external body forces and external body couples, external heat sources, external magnetic flux, etc. It is natural to believe that the nonlocal means of the body to reply to external actions are among internal mechanical actions (internal body forces, internal body couples, surface tractions, etc.), internal heat sources, etc.

Here, we consider that the external influences received by the body are represented by external surface forces, external body forces and external heat sources. As nonlocal reply, the body opposes an internal body forces field and internal heat sources.

We will use the same scheme as in the previous papers, but the principle of entropy will be formulated as in [10] which is different from that given in [9].

Let V be the region occupied by a continuous body and let P be an arbitrary part of V .

The influence of the mass contained in the domain $V-P$ on the mass contained in the domain P can be described by an internal body forces field and an internal heat sources field acting at the points of P . On the boundary ∂P of P we must consider the contact forces and a heat surface flux.

We will employ the usual notations, sometimes without explanation. To this purpose we will admit the following principles:

I. *Principle of conservation of mass*

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \int_P \rho(x) dX = 0,$$

where $\rho(x)$ is the density of medium. Here and in the following dX and dY are elements of volume.

II. Principle of internal body actions.

a) There exists a vector function $\mathbf{g}(x, y)$, defined on $V \times V$, called internal body forces density, such that, the contribution $\mathbf{g}_P(x)$ of the mass contained in a region $P \subset V$ to the total internal body forces in the point $x \in V$ is given by

$$(2) \quad \rho \mathbf{g}_P(x) = \int_P \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY, \quad x \in V, y \in P.$$

We will denote

$$(3) \quad \rho \mathbf{g}(x) = \rho \mathbf{g}_V(x) = \int_V \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY$$

and that means $\mathbf{g}(x)$ is the total internal body forces density in the point $x \in V$.

The function $\mathbf{g}(x, y)$ has the following properties :

$$(4) \quad \iint_{P \times P} \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dX dY = \int_P \rho(x) \mathbf{g}_P(x) dX = 0,$$

$$(5) \quad \int_P \left[\mathbf{r} \times \int_P \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY \right] dX = \int_P [\mathbf{r} \times \rho(x) \mathbf{g}_P(x)] dX = 0,$$

where $\mathbf{r}$ is the position of the point x with respect to the coordinate origin.

b) There exists a scalar function $w(x, y)$, defined on $V \times V$, called internal heat sources density, such that the contribution $w_P(x)$ of the mass contained in a region $P \subset V$ to the internal heat source at the point $x \in V$ can be obtained in the following manner

$$(6) \quad \rho w_P(x) = \int_P \rho(y) w(x, y) dY.$$

We will denote

$$(7) \quad \rho w(x) = \rho w_V(x) = \int_V \rho(y) w(x, y) dY.$$

The formulae (4) and (5) mean that the resultant and the moment. resultant of internal body forces of P are zero.

III. Principle of linear momentum. The derivative of the linear momentum of P with respect to the time is equal to the resultant of external (to P) forces :

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \int_P \rho(x) \mathbf{v}(x) dX = \int_P \rho(x) \mathbf{f}(x) dX + \int_P dX \int_{V-P} \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY + \int_{\partial P} \mathbf{t} d\sigma,$$

where $\mathbf{f}(x)$ are the external body forces per unit mass, $\mathbf{t}$ the surface tractions on ∂P per unit area as effect of the actions of the medium located in $V-P$ and $\mathbf{v}$ the velocity field.

IV. *Principle of angular momentum.* The derivative of the angular momentum of the mass located in P is equal to the resultant moment of external (to P) applied forces. Then we have

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_P [\mathbf{r} \times \rho(x) \mathbf{v}(x)] dX &= \int_P [\mathbf{r} \times \rho(x) \mathbf{f}(x)] dX + \\ &+ \int_P \left[\mathbf{r} \times \int_{V-P} \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY \right] dX + \int_{\partial P} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) d\sigma. \end{aligned}$$

V. *Principle of energy.* There exists a specific internal energy ε per unit mass, such that, the balance of energy can be stated as

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_P \rho(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2) dX &= \int_P \rho(\mathbf{r} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dX + \int_P \mathbf{v}(x) dX \int_{V-P} \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY + \\ &+ \int_P dX \int_{V-P} \rho(y) w(x, y) dY + \int_{\partial P} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - h) d\sigma, \end{aligned}$$

and

$$(11) \quad \int_P \mathbf{v}(x) dX \int_P \rho(y) \mathbf{g}(x, y) dY + \int_P dX \int_P \rho(y) w(x, y) dY = 0,$$

where $\mathbf{r}$ is the external body heat sources density per unit mass and h is the surface heat flux per unit area across the surface ∂P .

The equation (11) has an evident mechanical meaning. There is no reason to consider the equation (11) as the single possibility. According to the properties of the internal body forces and internal heat sources we can introduce an entity in order to describe the evolution of the first member of Eq. (11).

VI. *Principle of entropy.* We assume a balance of entropy in the form

$$(12) \quad \int_P \rho S dX - \left\{ \int_P \frac{\rho r}{T} dX - \int_{\partial P} \frac{h}{T} d\sigma \right\} \geq 0,$$

where S is the specific entropy per unit mass and $T > 0$ is the absolute temperature.

Using these principles we can derive the equations of motion for our continuum medium. Let us first observe that, according to (4) and (5), we have

$$\int_P dX \int_{V-P} \rho(y) g(x, y) dY = \int_P dX \int_P \rho(y) g(x, y) dY = \int_P \rho(x) g(x) dX \quad (8)$$

and

$$\int_P \mathbf{r} \times \int_{V-P} \rho(y) g(x, y) dY dX = \int_P [\mathbf{r} \times \rho(x) g(x)] dX.$$

Taking into account the above results and making use of divergence theorem and equation of continuity

$$(13) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (9)$$

derived from first principle, we easily get

$$(14) \quad \int_P [t_{i,i} + \rho(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - \rho \mathbf{a}] dX = 0,$$

where $\mathbf{a}$ is the acceleration.

Since the integrand is supposed to be continuous and (14) must hold for arbitrary P , it results that

$$(15) \quad t_{i,i} + \rho(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \rho \mathbf{a}. \quad (10)$$

In a rectangular Cartesian sistem of coordinates x_1, x_2, x_3 , we obtain the well-known equations of motion

$$t_{ji,j} + \rho(f_i + g_i) = \rho a_i.$$

From the postulate of angular momentum, at the last, we obtain $t_{ij} = t_{ji}$. If the response of the body to external influences would have been represented, in addition to our suppositions, also by internal body couples, then the symmetry of the stress tensor would not be valid.

From the postulate of energy, by known procedure, we obtain

$$(16) \quad \int_P \rho(\dot{\epsilon} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon) dX = \int_P [\rho(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}] dX + \int_P (t_{ij} \epsilon_{ij} + t_{i,i} \mathbf{v} - q_{i,i}) dX, \quad (11)$$

where ϵ_{ij} are the strain tensor components and q_i the heat flux components.

Making use of (15) and remembering that (16) holds for arbitrary P , we obtain the energy equation in the form

$$(17) \quad \rho \dot{\epsilon} - t_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) - q_{i,i} = 0.$$

In the same way, from (12) we get

$$(18) \quad T\rho\dot{S} - \rho r - q_{i,i} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0.$$

With the specific Helmholtz free energy $\psi = \epsilon - ST$, the equation of energy and the inequality of entropy become

$$\begin{aligned} \rho(\dot{\psi} + \dot{S}T + S\dot{T}) - t_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(r + w) + q_{i,i} &= 0, \\ -\rho(\dot{\psi} + S\dot{T}) + t_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + \rho w - \frac{q_i T_{,i}}{T} &\geq 0. \end{aligned}$$

Now, it remains to prescribe appropriate constitutive equations for $g(x)$ [or $g(x, y)$], $w(x)$ [or $w(x, y)$], t_{ij} , S and q_i .

To this purpose we must employ (19), (20) (4), (5) and (11).

The equation

$$\int_V \rho(gv + w) dX = 0$$

derived from (11) can be useful for the theory of constitutive equations.

The entropy inequality and the energy equation are similar to the local classical case and in consequence we can employ similar technics to derive the constitutive equations. Especially, we can use the technics developed by Eringen [4] and by Green and Naghdi [6].

Received December 24, 1981

University „Al. I. Cuza”, Jassy,
Faculty of Mathematics

REFERENCES

1. Kröner E., *Elasticity Theory of Materials with Long-range Cohesive Forces*. Int. J. Sol. Str., 3, 3, 731–742 (1967).
2. Kunin I. A. *The Theories of Elastic Media with Microstructure and the Theory of Dislocations*. In Kröner (Ed.), *Mechanics of generalized continua*, Springer-Verlag, pp. 321–329, 1968.
3. Rogula D., *On Nonlocal Continuum Theory of Elasticity*. Arh. Mech. (Warszawa), 25, 2, 233–251 (1973).
4. Eringen A. C., *Theory of Nonlocal Thermoelasticity*. Int. J. Engng. Sci., 12, 1063–1077 (1974).
5. Edelen D. G. B., *Nonlocal Field Theory*. In Eringen (Ed.), *Continuum Physics*, Vol. IV, Academic Press, New-York, 1976.
6. Green A. E., Naghdi P. M., *On Non-local Continuum Mechanics*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83, 307–319 (1978).
7. Borș C. I., *On Nonlocal Elastic Continuum*. An. șt. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, XXV (supplement), 49–52 (1979).
8. Borș C. I., *A Nonlocal Continuum with Asymmetric Stress Tensor*. Bul. Inst. polit. Iași, XXVI (XXX), 3–4, s.I (1980).
9. Borș C. I., *Sur la thermodynamique des milieux continus non locaux*. C.R. Acad. Sci. Paris, 290, B, 427–430 (1980).
10. Borș C. I., *Deformable Solids with Microstructure Having a Symmetric Stress Tensor*. An. șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași (1981) (in print).

DESPRE MEDII CONTINUE NELOCALE

(Rezumat)

Plecînd de la postulatele enunțate se stabilesc ecuațiile de mișcare ale unui mediu deformabil nelocal.

THERMOELASTIC VIBRATIONS OF A CIRCULAR CYLINDER IN A NEW THEORY OF THERMOELASTICITY

BY

ELISABETA RUSU

The problem of vibrations of a circular cylinder in the classical theory of linear thermoelasticity has been discussed by P. Chadwick [1], I. Sneddon [2]. A.E. Green and K. Lindsay [3] gave a generalized theory of thermoelasticity.

In this paper we consider thermoelastic vibrations of a circular cylinder in the generalized theory of linear thermoelasticity [3]. We consider an infinite, homogeneous, isotropic, centrosymmetric circular cylinder.

It is convenient to employ orthogonal curvilinear coordinates.

We denote by (r, φ, z) cylindrical polar coordinates referred to the axis of the cylinder. Let's be $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (r, \varphi, z)$. Base vectors and metric tensor for the coordinate system θ are:

$$g_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^i}, \quad g_{ij} = \bar{g}_i \bar{g}_j;$$

$$(1) \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad g = r^2;$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = 1, \quad g^{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

The only non-zero Christoffel's symbols are

$$(2) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

The basic equations of generalized theory of thermoelasticity are [4]:

i) the equations of motion:

$$(3) \quad \tau^{ij}_{|j} = \rho \ddot{u}^i, \\ \theta_0 \rho \dot{\eta} + q^i_{|i} = 0;$$

ii) the constitutive equations:

$$(4) \quad \tau^{ij} = g^{ij} \gamma_r^r + 2\mu \dot{\gamma}^{ij} - m(\theta + \alpha \dot{\theta}) g^{ij}, \\ \rho \eta = a + d\theta + h\dot{\theta} + \theta_0 m \gamma_r^r, \\ q^i = -\theta_0 k g^{ij} \theta_{,j};$$

iii) the geometrical relations

$$(5) \quad 2\gamma_{ij} = u_{i|j} + u_{j|i}; \quad \gamma_j^i = g^{ir}\gamma_{rj}.$$

We employ the physical components of stress.

We denote

$$(6) \quad \bar{\epsilon}_r = \bar{g}_1, \quad \bar{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{r}\bar{g}_2; \quad \bar{\epsilon}_z = \bar{g}_3;$$

$$\bar{u} = u^i \bar{g}_i = u_r \bar{\epsilon}_r + u_\varphi \bar{\epsilon}_\varphi + u_z \bar{\epsilon}_z,$$

where (u_r, u_φ, u_z) are physical components of the displacement vector $\bar{u}$.

Then

$$(7) \quad u^1 = u_1 = u_r, \quad u^2 = \frac{1}{r^2} u_2 = \frac{1}{r} u_\varphi, \quad u^3 = u_3 = u_z;$$

$$\ddot{u}^1 = \ddot{u}_r, \quad \ddot{u}^2 = \frac{1}{r} \ddot{u}_\varphi, \quad \ddot{u}^3 = \ddot{u}_z.$$

Physical components of strain tensor ϵ_{ij} are:

$$(8) \quad \epsilon_{rr} = \gamma_{11} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \gamma_{22} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad \epsilon_{zz} = \gamma_{33} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\epsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r} u_\varphi \right),$$

$$\epsilon_{\varphi z} = \frac{1}{r} \gamma_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \right),$$

$$\epsilon_{rz} = \gamma_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Physical components of stress tensor are

$$(9) \quad \sigma_{ij} = \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ii}}} \tau^{ij},$$

so that

$$(10) \quad \sigma_{rr} = \tau^{11}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = r^2 \tau^{22}, \quad \sigma_{zz} = \tau^{33};$$

$$\sigma_{r\varphi} = r \tau^{12}, \quad \sigma_{rz} = \tau^{13}, \quad \sigma_{\varphi z} = r \tau^{23}.$$

Then

$$(11) \quad \sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{rr} - m(\theta + \alpha \dot{\theta}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{\varphi\varphi} - m(\theta + \alpha \dot{\theta}),$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{zz} - m(\theta + \alpha \dot{\theta}), \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu \epsilon_{r\varphi},$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu \epsilon_{rz}, \quad \sigma_{\varphi z} = 2\mu \epsilon_{\varphi z},$$

where

$$(12) \quad e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = \gamma_k^k = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r.$$

We have also

$$(13) \quad q^i|_i = -k\theta_0 \Delta \theta.$$

The equations of motion become

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{\varphi r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ d\dot{\theta} + h\ddot{\theta} + \theta_0 m \frac{\partial e}{\partial t} - k\Delta\theta &= 0. \end{aligned}$$

We make use of potential functions. Since the propagation of elastic shear waves is uninfluenced by the thermal properties of the solid, we need only to consider longitudinal vibrations.

The displacement components are given in terms of the scalar functions Φ and Ψ by:

$$(15) \quad u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi),$$

assuming that both Φ and Ψ are functions of r and z only.

The Eqs. (14) take the form:

$$(16) \quad \begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi} &= \frac{m}{\lambda + 2\mu} (\dot{\theta} + \alpha \ddot{\theta}), \\ \Delta \Psi - \frac{1}{r^2} \Psi &= \frac{1}{c_2^2} \ddot{\Psi}, \\ k\Delta\theta - d\dot{\theta} - h\ddot{\theta} - \theta_0 m \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi &= 0, \end{aligned}$$

where

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Assuming a solution of these equation of the form

$$(17) \quad \{\theta, \Phi, \Psi\} = \{\hat{\theta}(r), \hat{\Phi}(r), \hat{\Psi}(r)\} e^{i(\eta z - \omega t)}$$

we find that the functions $\hat{\theta}(r)$, $\hat{\Phi}(r)$, $\hat{\Psi}(r)$ satisfy the system of second order ordinary differential equations:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{\Phi}}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \eta^2 \right) \hat{\Phi} = \frac{m}{\rho c_1^2} (1 - i\alpha\omega) \hat{\theta}, \\
 (18) \quad & \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{\Psi}}{dr} + \left[\left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \eta^2 \right) - \frac{1}{r^2} \right] \hat{\Psi} = 0, \\
 & \frac{d^2 \hat{\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{\theta}}{dr} + \left(\frac{d i}{k} + \frac{h \omega^2}{k} - \eta^2 \right) \hat{\theta} = - \frac{i \omega \theta_0 m}{k} \left(\frac{d^2 \hat{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{\Phi}}{dr} - \eta^2 \hat{\Phi} \right).
 \end{aligned}$$

If we assume that u_r , u_z and u_φ each remain finite along the z -axis we find that

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \theta &= \left\{ \frac{\rho c_1^2}{m(1 - i\alpha\omega)} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \zeta_1^2 \right) A J_0(k_1 r) + \frac{\rho c_1^2}{m(1 - i\alpha\omega)} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \zeta_2^2 \right) B J_0(k_2 r) \right\} e^{i(\eta z - \omega t)}, \\
 \Phi &= \{ A J_0(k_1 r) + B J_0(k_2 r) \} e^{i(\eta z - \omega t)}, \\
 \Psi &= C J_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - \eta^2} \right) e^{i(\eta z - \omega t)},
 \end{aligned}$$

where

$$(20) \quad k_1^2 = \zeta_1^2 - \eta^2, \quad k_2^2 = \zeta_2^2 - \eta^2,$$

and ζ_1^2 and ζ_2^2 are the roots of equation

$$(21) \quad \zeta^4 - \zeta^2 \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{d i \omega}{k} + \frac{h \omega^2}{k} + \frac{i \omega \theta_0 m^2 (1 - i\alpha\omega)}{\rho k c_1^2} \right] + \frac{\omega^2}{c_1^2} \left(\frac{d i \omega}{k} + \frac{h \omega^2}{k} \right) = 0,$$

A , B and C are arbitrary constants which are found by substituting equations (19) into the boundary conditions. Since the surface $r=a$ of the cylinder is free from mechanical and thermal constraints and if there is radiation from the surface of cylinder (into a medium maintained at the reference temperature) we have the conditions:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \sigma_{rr} &= \rho c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - 2 \rho c_2^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right) - m \left(\theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0, \\
 \sigma_{rz} &= \rho c_2^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial r} + H \theta &= 0, \quad \text{at } r=a
 \end{aligned}$$

the stress component $\sigma_{r\varphi}$ vanishing identically and H is a constant.

Substituting from (19) into Eqs. (22) we find that

$$\left[\left(2 - \frac{\omega^2}{\eta^2 c_2^2} \right) J_0(a \eta \beta_1) + \frac{2 \beta_1}{a \eta} J_1(a \eta \beta_1) \right] A + \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{\eta^2 c_2^2} \right) J_0(a \eta \beta_2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\beta_2}{a\eta} J_1(a\eta\beta_2) \Big] B - 2i\beta_3 C \left[J_0(a\eta\beta_3) - \frac{J_1(a\eta\beta_3)}{a\eta\beta_3} \right] = 0, \\
 (23) \quad & 2i\beta_1 A J_1(a\eta\beta_1) + 2i\beta_2 B J_1(a\eta\beta_2) - \left(2 - \frac{\omega^2}{\eta^2 c_2^2} \right) C J_1(a\eta\beta_3) = 0, \\
 & \left(\frac{\omega^2}{c_1^2 \eta^2} - 1 - \beta_1^2 \right) \left[J_0(a\eta\beta_1) \frac{H}{\eta} - \beta_1 J_1(a\eta\beta_1) \right] A + \\
 & + \left(\frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} - 1 - \beta_2^2 \right) \left[J_0(a\eta\beta_2) \frac{H}{\eta} - \beta_2 J_1(a\eta\beta_2) \right] B = 0,
 \end{aligned}$$

where use has been made of the recurrence relations satisfied by Bessel functions and

$$(24) \quad \beta_1^2 = \frac{\zeta_1^2}{\eta^2} - 1, \quad \beta_2^2 = \frac{\zeta_2^2}{\eta^2} - 1, \quad \beta_3^2 = \frac{\omega^2}{\eta^2 c_2^2} - 1.$$

Eliminating A , B , C between Eqs. (23) we obtain

$$\begin{aligned}
 & \left(2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} \right)^2 J_1(a\eta\beta_3) \left[\beta_1 \left(\beta_1^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_1^2 \eta^2} \right) J_0(a\eta\beta_2) J_1(a\eta\beta_1) - \right. \\
 & \quad \left. - \beta_2 \left(\beta_2^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_1^2 \eta^2} \right) J_0(a\eta\beta_1) J_1(a\eta\beta_2) \right] + \\
 (25) \quad & + \frac{2}{a\eta} \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) J_1(a\eta\beta_1) J_1(a\eta\beta_2) \left\{ 2a\beta_3 J_0(a\eta\beta_3) - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} J_1(a\eta\beta_3) \right\} = \\
 & = \frac{H}{\eta} \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} \right)^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) J_0(a\eta\beta_1) J_0(a\eta\beta_2) J_1(a\eta\beta_3) \right] - \\
 & - \frac{2}{a\eta} \left\{ 2a\eta\beta_3 J_0(a\eta\beta_3) - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} J_1(a\eta\beta_3) \right\} \left\{ \beta_1 \left(\beta_2^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} \right) J_0(a\eta\beta_2) J_1(a\eta\beta_1) - \right. \\
 & \quad \left. - \beta_2 \left(\beta_1^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \eta^2} \right) J_0(a\eta\beta_1) J_1(a\eta\beta_2) \right\}.
 \end{aligned}$$

The wave number η is determined as a function of the frequency ω by the Eqs. (21), (24), (25).

We can expand the roots of Eq. (21) in powers of the reduced frequency κ as in [5].

Received October 30, 1982

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Chadwick P., *Thermoelasticity. The Dynamic Theory*. Progress in Solid Mechanics (I). Ed. Sneddon and Hill, 1960, p. 265.
2. Sneddon, I. *The Linear Theory of Thermoelasticity*. Int. Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, June 1972.

3. Green A. E., Lindsay K. A., *Thermoelasticity*. J. Elasticity, 2, 1—7 (1972).
4. Green A. E., *A Note on Linear Thermoelasticity*. Mathematika, 19, 69—75 (1972).
5. Rusu E., Gîrlea C., Buzescu F., *Rayleigh Waves in a Generalized Theory of Thermoelasticity*. Bul. Inst. polit. Iași, XXVI (XXX), 3—4, s. IV (1980).

VIBRAȚIILE TERMOELASTICE ALE UNUI CILINDRU CIRCULAR INTR-O NOUĂ TEORIE A TERMOELASTICITĂȚII

(Rezumat)

Se studiază în cadrul teoriei generalizate a termoelasticității, vibrațiile termoelastice ale unui cilindru circular, infinit, omogen și izotrop.

The wave number α is determined as a function of the frequency ω by the Eqs. (21), (24), (25). We can expand the roots of Eq. (21) in power of the reduced frequency α as in (2).

Received October 10, 1982
Department of Mechanics, Politehnica Institute, Iași

REFERENCES

1. G. A. Eringen, *Nonlinear Theory of Dynamic Fracture in Solid Mechanics*, (P. E. Siffrin and H. L. Fréchet, Eds.), 1967, p. 283.
2. Siffrin P. E., *The Linear Theory of Thermoelasticity for Composites*, Springer-Verlag, New York, 1972.

THEOREM OF COMPATIBILITY AND UNIQUENESS FOR THE EQUILIBRIUM SOLUTION OF DIPOLAR ELASTIC SOLID

BY

GABRIELA SILVIA CIUMAȘU

A. E. Green and R. S. Rivlin in [2] have established the following basic equations for simple dipolar elastic solids:

i) the equilibrium equations

$$(1) \quad \begin{aligned} T_{Ki,K} + \rho_0 F_i &= 0, \\ S_{LiK,L} + \rho_0 F_{iK} - x_{i,A} \bar{S}_{AK} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{in } \Omega);$$

ii) the geometrical equations

$$(2) \quad \begin{aligned} 2E_{AB} &= U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ E_{B:A} &= U_{AB} + U_{M,A} U_{MB} + U_{M,A} X_{MB}, \\ E_{B:AK} &= U_{AB,K} + U_{M,A} U_{MB,K} + U_{M,A} X_{MB,K}; \end{aligned}$$

iii) the constitutive equations

$$(3) \quad \begin{aligned} S'_{AB} &= X_{A,i} (T_{B^i} - \bar{S}_{BC} x_{iC} - S_{KBC} x_{iC,K}) = \frac{\partial W}{\partial E_{AB}}, \\ \bar{S}_{AB} &= \frac{\partial W}{\partial E_{B:A}}, \quad S_{KAB} = \frac{\partial W}{\partial E_{B:AK}} \end{aligned}$$

We have used the notations from [2]. To the Eqs. (1)–(3) we add the boundary conditions

$$(4) \quad T_{Ki} N_K = T_i, \quad S_{LiK} N_L = S_{iK} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

We denote by Ω a homogeneous, reference configuration of an elastic body, and $\partial\Omega$ the boundary of Ω . In the case of equilibrium any solution of a boundary-value problem (1)–(4) must be such that the external loads are equilibrated in the deformed state. Thus

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_{\omega} \rho F_i d\Omega + \int_{\partial\omega} t_i da &= 0, \\ \int_{\omega} (\rho \varepsilon_{ijk} x_j F_k + \rho \varepsilon_{ijk} x_j S_{ks}) d\Omega + \int_{\partial\omega} (\varepsilon_{ijk} x_j t_k + \varepsilon_{ijk} x_j S_{ks}) da &= 0, \end{aligned}$$

where ω is the configuration of equilibrium and $\partial\omega$ the boundary of ω .

Transforming variables so as to integrate over the reference configuration, we have the equivalent conditions:

$$(6) \quad \int_{\Omega} \rho_0 F_i dv + \int_{\partial\Omega} T_i dA = 0,$$

$$\int_{\Omega} (\rho_0 \varepsilon_{ijr} x_j F_r + \rho_0 \varepsilon_{ijr} x_{jc} F_{rc}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} x_j T_r + \varepsilon_{ijr} x_{jc} S_{rc}) dA = 0,$$

where $F_{ij} = F_{iB} x_{j,B}$, $T_{ij} = S_{iB} x_{j,B}$, $x_{mj} = x_{mB} X_{B,i}$.

The condition $(6)_1$ is a necessary condition for equilibrium, $(6)_2$ is a condition of compatibility to be satisfied by any solution of the problem (1)–(4). Introducing the astatic loads tensor

$$(7) \quad A_{jr} = \int_{\Omega} (\rho_0 x_j F_r + \rho_0 x_{jc} F_{rc}) dv + \int_{\partial\Omega} (x_j T_r + x_{jc} S_{rc}) dA$$

and using the theorem of Da Silva [5, p. 128] we observe that the torque $(6)_2$ vanishes after the rigid rotation about the origin if and only if QA is symmetric:

$$(8) \quad QA - A^T Q^T = 0,$$

where $A = (A_{jr})$, and Q is an orthogonal tensor. In [5, p. 128] it is proved that the equation (8) has at least four solutions.

Applying Da Silva's theorem to the reference configuration, we see that a change of reference configuration by a rigid rotation can always be found such that after change, the equation

$$(9) \quad \int_{\Omega} (\rho_0 \varepsilon_{ijr} X_j F_r + \rho_0 \varepsilon_{ijr} X_{jc} F_{rc}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} X_j T_r + \varepsilon_{ijr} X_{jc} S_{rc}) dA = 0$$

is satisfied, where X_j are coordinates of the particle in the reference configuration, and X_{jc} are the values of the functions x_{jc} in the reference configuration. Subtracting (9) from $(6)_2$ we obtain the condition of compatibility in terms of the displacement u_i and the dipolar displacement u_{iA} :

$$(10) \quad \int_{\Omega} (\rho_0 \varepsilon_{ijr} u_j F_r + \rho_0 \varepsilon_{ijr} u_{jc} F_{rc}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} u_j T_r + \varepsilon_{ijr} u_{jc} S_{rc}) dA = 0.$$

We consider the problem (1)–(4) where the mechanical loads depend analitically on the parameter ε , so that

$$(11) \quad T_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n T_i^{(n)}, \quad F_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_i^{(n)},$$

$$S_{iK} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n S_{iK}^{(n)}, \quad F_{iK} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_{iK}^{(n)}.$$

We shall assume that there exists a solution (u_i, u_{iA}) to the boundary-value problem (1)–(4) corresponding to the loads (11), which can be expanded as absolutely convergent power series in ε :

$$(12) \quad u_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_i^{(n)}, \quad u_{iA} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_{iA}^{(n)}.$$

Thus, in order that the expansions (12) to be a solution it is necessary that they satisfy the condition of compatibility (10). If we substitute (11), (12) in (10) we obtain

$$(13) \quad \sum_{m=1}^{n-1} \left[\int_{\Omega} (\varepsilon_{ijr} u_j^{(n-m)} \rho_0 F_r^{(m)} + \rho_0 \varepsilon_{ijr} u_{jC}^{(n-m)} F_{rC}^{(m)}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} u_j^{(n-m)} T_r^{(m)} + \varepsilon_{ijr} u_{jC}^{(n-m)} S_{rC}^{(m)}) dA \right] = 0.$$

Substituting the series (11), (12) in (1), (4) and then equating like powers of ε we obtain that the calculation of m terms in the expansions (12) is reduced, formally, to the solution of m boundary-value problems of traction in the classical infinitesimal theory of elasticity for the same body.

Following [3], [4], [1], we have the

Theorem. *The boundary-value problem of infinitesimal elasticity with microstructure has a solution belonging to $C^\infty(\bar{\Omega})$ if and only if the C^∞ functions F_i , F_{iC} , T_i , T_{iC} satisfy the conditions*

$$(14) \quad \int_{\Omega} \rho_0 F_i dv + \int_{\partial\Omega} T_i dA = 0, \\ \int_{\Omega} (\varepsilon_{ijr} \rho_0 X_j F_r + \varepsilon_{ijr} \rho_0 X_{jC} F_{rC}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} X_j T_r + \varepsilon_{ijr} X_{jC} S_{rC}) dA = 0.$$

If (u_i, u_{ij}) is a solution for the problem then

$$(15) \quad u'_i = u_i + \varepsilon_{ijk} b_j X_k, \quad u'_{jC} = u_{jC} + \varepsilon_{jst} b_s X_{tC},$$

where b_i are constants is also a solution. The rotation which appear in (15) is uniquely determined by the compatibility conditions (13). Suppose that solutions $(u_i^{(1)}, u_{iA}^{(1)}), \dots, (u_i^{(p-1)}, u_{iA}^{(p-1)})$ have already been found such that the compatibility conditions (13) are satisfied for $n=2, 3, \dots, p$. The solution (15), for step $n=p$ will satisfy the compatibility condition (13) if

$$(16) \quad (A_1 - 1 \operatorname{tr} A_1) b^{(p)} = -R^{(p)},$$

where A_1 is the astatic load (7) corresponding to $F_r^{(1)}, F_{rC}^{(1)}, T_r^{(1)}, S_{rC}^{(1)}$ and

$$(17) \quad R_i^{(p)} = \sum_{m=1}^p \left[\int_{\Omega} (\varepsilon_{ijr} u_j^{(p+1-m)} \rho_0 F_r^{(m)} + \varepsilon_{ijr} u_{jC}^{(p+1-m)} \rho_0 F_{rC}^{(m)}) dv + \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_{ijr} u_j^{(p+1-m)} T_r^{(m)} + \varepsilon_{ijr} u_{jC}^{(p+1-m)} S_{rC}^{(m)}) dA \right].$$

In order that (16) posses a unique solution, it is necessary and sufficient that

$$(18) \quad \det(A_1 - 1 \operatorname{tr} A_1) \neq 0,$$

that is, the loads $F_r^{(1)}, F_{rc}^{(1)}, T_r^{(1)}, S_{rc}^{(1)}$ must not possess an axis of equilibrium. Under this condition, therefore the functions $(u_i^{(n)}, u_{iA}^{(n)})$ are unique.

It is easy to show that the condition $(14)_1$ for the existence of a solution $(u_i^{(n)}, u_{iA}^{(n)})$ is satisfied. The condition $(14)_2$ is equivalent to the compatibility condition (13).

Hence, if the loads $(F_r^{(1)}, F_{rc}^{(1)}, T_r^{(1)}, S_{rc}^{(1)})$ have no axis of equilibrium, and the compatibility conditions (13) are satisfied, then the solution $(u_i^{(n)}, u_{iA}^{(1)}), \dots, (u_i^{(n)}, u_{iA}^{(n)}), \dots$, exists and are unique to within a uniform translation.

Received September 2, 1981

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Fichera G., *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems*. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1965.
2. Green A. E., Rivlin R. S., *Multipolar Continuum Mechanics*. Arch. Rational Mech. Anal., **17**, 113 (1964).
3. Hlavacek L., Hlavacek M., *On the Existence and Uniqueness of Solutions and some Variational Principles in Linear Theories of Elasticity with Couple-stress (II)*. Aplik. Mat., **14**, 411–426 (1969).
4. Ieșan E., *Saint-Venant's Problem for Inhomogeneous and Anisotropic Elastic Solids with Microstructure*. Archivum Mechaniki Stosowanej, Warszawa, **29**, 3, 419–430 (1977).
5. Truesdell C., Noll W., *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. „Handbuch der Physik“, **III**–3, Springer Verlag, 1965.

TEOREMĂ DE COMPATIBILITATE ȘI UNICITATE A SOLUȚIEI ECHILIBRULUI UNUI SOLID ELASTIC DIPOLAR

(Rezumat)

Se dă o teoremă de compatibilitate și unicitate a soluției echilibrului unui solid elastic dipolar—model conceput de Green și Rivlin în [2]—urmind metoda lui Signorini prezentată în [5, p. 222] pentru teoria neliniară a elastostaticii clasice.

A GENERALIZED THEORY OF LINEAR THERMOELASTICITY OF PLATES

BY

I. IBĂNESCU

0. Introduction. In this paper we consider the deformation of a plate in the generalization of classical thermoelasticity as proposed by I. Müller [1]. A. E. Green and K. A. Lindsay have presented this theory of thermoelasticity in a more explicit form [2]. The basic equations are derived and the field equations are divided in two systems. The first system of equations characterize the deformation in the middle plane while the second system characterize the flexion of the plate. For the deformation in the middle plane a uniqueness theorem is also stated.

1. The Basic Equations. The field of equations in the generalized thermoelasticity as presented in [2], is reproduced here as follows:

i) the equations of motion

$$(1.1) \quad \begin{aligned} t_{ik,i} + \rho F_k &= \rho \ddot{u}_k, \\ t_{ki} &= t_{ik}, & \text{in } B \times [0, \infty); \\ \rho r - q_{i,i} - \rho \theta_0 \dot{\eta} &= 0, \end{aligned}$$

ii) the constitutive equations

$$(1.2) \quad \begin{aligned} t_{ik} &= \lambda e_{rr} + 2\mu e_{ik} - \frac{E\beta}{3(1-2\nu)} (\theta + \alpha \dot{\theta}) \delta_{ik}, \\ \rho \eta &= a + d\theta + h\dot{\theta} + \frac{E\beta}{3(1-2\nu)} e_{rr}, \\ q_i &= -k\theta_{,i}, \end{aligned}$$

where

$$(1.3) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Here t_{ik} are the components of the stress tensor; u_k are the components of displacement vector; F_k are components of body forces; q_k are component of heat flux vector; η is specific entropy; θ is temperature field in body; $\lambda, \mu, \beta, a, d, h$ are constants of material; B is the domain of the plate; δ_{ik} is Kronecker symbol. The comma denotes the differentiation with respect

to x_i ($i=1, 2, 3$) and the dot denotes the differentiation with respect to time t . Latin indices have the range 1, 2, 3, Greek indices take value 1, 2 only. The density ρ and the temperature θ_0 are given constants subject to the condition

$$(1.4) \quad \rho > 0, \quad \theta_0 > 0.$$

From the residual entropy inequality we have the condition [2]

$$(1.5) \quad (d\alpha - h)x^2 + ky_i y_i \geq 0$$

for all arbitrary x and y_i and

$$(1.6) \quad d\alpha - h > 0.$$

The state of plane stress is given by

$$(1.7) \quad t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0.$$

Using (1.7) and (1.2) we obtain

$$(1.8) \quad e_{33} = \frac{\beta(1+\nu)}{3(1-\nu)} (\theta + \alpha\dot{\theta}) - \frac{\nu}{1-\nu} e_{\gamma\gamma}$$

Substituting (1.8) into Eqs. (2.2) we find:

$$(1.9) \quad t_{\alpha\beta} = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ (1-\nu)e_{\alpha\beta} + \left[\nu e_{\gamma\gamma} - \frac{\beta(1+\nu)}{3} (\theta + \alpha\dot{\theta}) \right] \delta_{\alpha\beta} \right\},$$

$$(1.10) \quad \rho\eta = a + d^*\dot{\theta} + h^*\dot{\theta} + \frac{E\beta}{3(1-\nu)} e_{\gamma\gamma},$$

where

$$(1.11) \quad d^* = d + \frac{E\beta^2\alpha(1+\nu)}{9(1-2\nu)(1-\nu)}, \quad h^* = h + \frac{E\beta^2\alpha(1+\nu)}{9(1-2\nu)(1-\nu)}.$$

Consider an elastic plate of uniform thickness h , the middle plane of which coincides with Ox_1x_2 -plane. We denote by D the domain of the middle-section and by Γ the boundary of D . Faces of the plate are the surfaces $x_3 = \pm(h/2)$.

Using ideas similar to those of B. A. Boley and J. H. Weiner [3] we consider the plate in a state of plane stress and take the constitutive equations (1.9) where the components of strain can be expressed from

$$(1.12) \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u'_{\alpha,\beta} + u'_{\beta,\alpha}) - x_3 w_{,\alpha\beta}.$$

Here the $u'_\alpha = u'_\alpha(x_1, x_2)$ and $w(x_1, x_2)$ represent the traverse deflection of the plate.

The stress resultants and couples are known to be defined as follows

$$(1.13) \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{\alpha\beta} x_3 dx_3.$$

It is necessary to introduce the functions

$$(1.14) \quad \tau_0 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dx_3, \quad \tau = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta x_3 dx_3.$$

Substituting Eqs. (1.12), (1.9) into (1.13) and using (1.14) we find the expression for the stress resultants and couples as follows:

$$(1.15) \quad N_{\alpha\beta} = D \left\{ (1-\nu) e'_{\alpha\beta} + \left[\nu e'_{\gamma\gamma} - \frac{\beta(1+\nu)}{3} (\tau_0 + \alpha \dot{\tau}_0) \right] \delta_{\alpha\beta} \right\},$$

$$(1.16) \quad M_{\alpha\beta} = -N \left\{ (1-\nu) w_{,\alpha\beta} + \left[\nu \Delta w + \frac{\beta(1+\nu)}{3} (\tau + \alpha \dot{\tau}) \right] \delta_{\alpha\beta} \right\},$$

where

$$(1.17) \quad e'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u'_{\alpha,\beta} + u'_{\beta,\alpha}) \quad \text{and} \quad \nabla^2 = \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

and the rigidity of the plate is

$$(1.18) \quad D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Integrating the relation (1.10) with respect to x_3 from $x_3 = -(h/2)$ to $x_3 = +(h/2)$ and using the relations (1.14)₁ and (1.12) we find

$$(1.19) \quad \rho \eta_0 = a^* + d^* \tau_0 + h^* \dot{\tau}_0 + \frac{E\beta}{3(1-\nu)} e'_{\gamma\gamma},$$

where

$$(1.20) \quad \eta_0 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta dx_3.$$

Similarly, by multiplying the relation (1.10) with x_3 and integrating with respect to x_3 from $x_3 = -(h/2)$ to $x_3 = +(h/2)$ we have

$$(1.21) \quad \rho \tilde{\eta} = d^* \tau + h^* \dot{\tau} - \frac{E\beta}{3(1-\nu)} \Delta w,$$

where

$$(1.22) \quad \tilde{\eta} = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta x_3 dx_3.$$

The equations of motion. The equations (1.1) may be separated as follows:

$$(1.23) \quad \begin{aligned} t_{\alpha\beta,\alpha} + t_{3\beta,3} + \rho F_{\beta} &= \rho \ddot{u}_{\beta}, \\ t_{\alpha 3,\alpha} + t_{33,3} + \rho F_3 &= \rho \ddot{u}_3. \end{aligned}$$

Integrating Eq. (1.23) over the thickness, we obtain

$$(1.24) \quad N_{\alpha\beta,\alpha} + [t_{3\beta}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \rho \tilde{F}_{\beta} = \rho h \ddot{u}'_{\beta}.$$

$$(1.25) \quad v_{\alpha,\alpha} + [t_{33}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \rho \tilde{F}_3 = \rho h \ddot{w},$$

where

$$(1.26) \quad v_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{\alpha 3} dx_3, \quad \tilde{F}_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_i dx_3.$$

In the same way, multiplying Eqs. (1.23)₁ by x_3 and integrating we have

$$(1.27) \quad M_{\alpha\beta,\alpha} + [t_{\beta 3} x_3]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - v_{\beta} + \rho \tilde{F}_{\beta} = -\frac{h^3}{12} \ddot{w}_{,\beta},$$

where

$$\tilde{F}_{\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\beta} x_3 dx_3.$$

We denote by s and p_{β} the expressions:

$$(1.28) \quad s = [t_{33}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \rho \tilde{F}_3, \quad p_{\beta} = [t_{\beta 3} x_3]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \rho \tilde{F}_{\beta}.$$

From (1.25) and (1.27) we find

$$(1.29) \quad M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + s + p_{\beta,\beta} = \rho h \ddot{w} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{w}_{,\beta\beta}.$$

The last term of Eq. (1.29) can be neglected as compared with the others, because h^3 is smaller than h .

With the assumption (1.7), Eqs. (1.24) and (1.29) take the form

$$(1.30) \quad N_{\alpha\beta,\alpha} + \rho \tilde{F}_{\beta} = \rho h \ddot{u}'_{\beta}$$

$$(1.31) \quad M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \rho \tilde{F}_3 + \rho \tilde{F}_{\beta,\beta} = \rho h \ddot{w}.$$

Now, we consider the last Eq. (1.1) and the last Eq. (1.2). Integrating its over the thickness, we obtain

$$(1.32) \quad \rho R - Q_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{h} [q_3]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \rho \theta_0 \dot{\eta}_0 = 0,$$

$$(1.33) \quad Q_{\alpha} = -k\theta_{,\alpha}, \quad (1.3)$$

where

$$(1.34) \quad R = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dx_3, \quad Q_{\alpha} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_{\alpha} dx_3. \quad (1.4)$$

Multiplying the same equations by x_3 and integrating we have

$$(1.35) \quad \rho \tilde{R} - \tilde{Q}_{\alpha,\alpha} - \rho \theta_0 \ddot{\eta} - \frac{12}{h^3} \left\{ [q_3 x_3]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_3 dx_3 \right\} = 0, \quad (1.5)$$

where

$$(1.36) \quad \tilde{R} = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r x_3 dx_3, \quad \tilde{Q}_{\alpha} = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_{\alpha} x_3 dx_3. \quad (1.6)$$

We observe that the set of equations can be divided in two groups: Eqs. (1.30), (1.32), (1.33), (1.19), (1.17), and (1.15) characterize the deformation in the middle plane, and Eqs. (1.35), (1.31), (1.21) and (1.16) characterize the flexion of the plate.

2. The Initial Conditions. For the domain B occupied by the plate we have prescribed initial conditions:

$$(2.1) \quad \dot{u}_{\alpha} = \dot{u}_{\alpha}^{(0)}, \quad u'_{\alpha}(0) = u_{\alpha}^{(0)}, \quad \text{on } B \quad \text{at } t=0$$

$$(2.2) \quad w(0) = w^0, \quad \dot{w}(0) = \dot{w}^0 \quad (1.7)$$

and

$$(2.3) \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}^0 \quad \text{on } B \quad \text{at } t=0.$$

Integrating the relation (2.3) over the thickness we have

$$(2.4) \quad \tau_0(0) = \tau_0^0 \quad \text{and} \quad \dot{\tau}_0(0) = \dot{\tau}_0^0 \quad \text{on } D \quad \text{at } t=0.$$

Multiplying the Eq. (2.3) by x_3 and integrating we get

$$(2.5) \quad \tau(0) = \tau^0 \quad \text{and} \quad \dot{\tau}(0) = \dot{\tau}^0 \quad \text{on } D \quad \text{at } t=0. \quad (1.8)$$

3. The Boundary Conditions. The boundary conditions are given as follows:

$$(3.1) \quad t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0 \quad \text{for } x_3 = \pm \frac{h}{2}, \quad (1.9)$$

$$(3.2) \quad u_i = \hat{u}_i \quad \text{or} \quad t_{\alpha j} u_j = \hat{p}_{\alpha} \quad \text{upon } \Sigma;$$

$$(3.3) \quad q_3(x_1, x_2, +h, t) = \bar{p}(x_1, x_2, t), \quad q_3(x_1, x_2, -h, t) = \bar{q}(x_1, x_2, t),$$

$$(3.4) \quad q_\alpha = \hat{q} \quad \text{or} \quad \theta = \hat{\theta} \quad \text{upon} \quad \Sigma.$$

Integrating the relations (3.2)₂ and (3.4) over the thickness we have

$$(3.5) \quad u_\alpha = \hat{u}_\alpha \quad \text{or} \quad N_{\alpha\beta} u_\beta = \hat{p}_\alpha \quad \text{upon} \quad \Gamma;$$

$$(3.6) \quad Q_\alpha u_\alpha = \hat{q} \quad \text{or} \quad \tau_0 = \hat{\tau}_0 \quad \text{upon} \quad \Gamma.$$

Multiplying the relations (3.4)₂ and (3.4) by x_3 and integrating we find

$$(3.7) \quad w = \hat{w} \quad \text{or} \quad M_{\alpha\beta} u_\beta = \hat{p}_\alpha \quad \text{upon} \quad \Gamma;$$

$$(3.8) \quad \hat{Q}_\alpha u_\alpha = \hat{q} \quad \text{or} \quad \tau = \hat{\tau} \quad \text{upon} \quad \Gamma.$$

The relations (2.1), (2.4), (3.5) and (3.6) represent the initial and boundary conditions for the problem of deformation in the middle plane of the plate.

In the same time, relations (2.2), (2.5), (3.7) and (3.8) are the initial and boundary conditions for the problem of bending the plate.

4. A Uniqueness Theorem For Solutions of Initial Boundary-Value Problems of Deformation in the Middle Plane. We consider the homogeneous system of equations (1.30) (1.32), (1.33), (1.19), (1.17), (1.15) and the initial and boundary conditions in which $u_\alpha^{(0)}$, u_α^0 , τ_0^0 , $\dot{\tau}_0^0$, $\dot{u}_\alpha$, $\hat{p}_\alpha$, $\hat{q}$, $\hat{\tau}_0$ are each zero. We use the notation $f(l)$, $f(m)$ for functions evaluated at time $t=l$, $t=m$. Then we have

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ N_{\alpha\beta}(m) \dot{u}'_\alpha(l) n_\beta - \frac{h Q_\alpha(l) n_\alpha}{\theta_0} [\tau_0(m) + \alpha \dot{\tau}_0(m)] \right\} ds = \\ & = \int_D \left\{ \rho h \ddot{u}'_\alpha(m) \dot{u}'_\alpha(l) - \frac{h Q_\alpha(l)}{\theta_0} [\tau_{0,\alpha}(m) + \alpha \dot{\tau}_{0,\alpha}(m)] \right\} dA + \\ & + \iint_D D [(1-\nu) e'_{\alpha\beta}(m) \dot{e}'_{\alpha\beta}(l) + \nu e'_{\gamma\gamma}(m) \dot{e}'_{\alpha,\alpha}(l)] dA + \\ & + h \iint_D [d^* \dot{\tau}_0(l) \tau_0(m) + d^* \alpha \dot{\tau}_0(l) \dot{\tau}_0(m) + h^* \tau_0(m) \ddot{\tau}_0(l) + \\ & + h^* \alpha \dot{\tau}_0(m) \ddot{\tau}_0(l)] dA. \end{aligned}$$

For zero initial and boundary condition the left hand side of identity (4.1) vanishes. We then put $l=\tau$, $m=2t-\tau$ and subtract from it the expression in which $l=2t-\tau$, $m=\tau$. If the resulting expression is integrated with respect to τ from $\tau=0$ to $\tau=t$ it is found that

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \iint_D \left\{ -\rho h \ddot{u}'_\alpha \dot{u}'_\alpha - \frac{h k \alpha}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} + D [(1-\nu) e'_{\alpha\beta} \dot{e}'_{\alpha\beta} + \nu e'_{\gamma\gamma} \dot{e}'_{\gamma\gamma}] + \right. \\ & \left. + h d^* \tau_0^2 + 2 h h^* \tau_0 \dot{\tau}_0 + h h^* \alpha \dot{\tau}_0^2 \right\} dA. \end{aligned}$$

Similary, by putting $l=m=\tau$, integrating (4.1) from $\tau=0$ to $\tau=t$, and using zero initial conditions we have

$$(4.3) \quad \iint_D \left\{ \rho h \dot{u}'_\alpha \dot{u}'_\alpha + \frac{k h \alpha}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} + D[(1-\nu) e'_{\alpha\beta} e'_{\alpha\beta} + \nu e'_{\gamma\gamma} e'_{\alpha\alpha}] + \right. \\ \left. + h d^* \tau_0^2 + h h^* \tau_0 \dot{\tau}_0 + h h^* \alpha \dot{\tau}_0^2 \right\} dA + \\ + 2h \int_0^t \left\{ \iint_D \left[(d^* \alpha - h^*) \dot{\tau}_0^2 + \frac{k}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} \right] dA \right\} d\tau.$$

From (4.2) and (4.3) we see that

$$(4.4) \quad \iint_D \left(\rho h \dot{u}'_\alpha \dot{u}'_\alpha + \frac{k \alpha}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} \right) dA + \\ + h \int_0^t \left\{ \iint_D \left[(d^* \alpha - h^*) \dot{\tau}_0^2 + \frac{k}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} \right] dA \right\} d\tau.$$

If we adopt the condition $\alpha > 0$ then, in view of (1.4) and (1.5) it follows from (4.4) that $\dot{u}'_\alpha(t)=0$ and in virtue of zero initial conditions $u'_\alpha(t)=0$. This proves the uniqueness of displacement field. Because $u'_\alpha(t)=0$ from (4.2) and (4.3) it follows that

$$(4.5) \quad \iint_D (d^* \tau_0^2 + 2h^* \tau_0 \dot{\tau}_0 + h^* \alpha \dot{\tau}_0^2) dA + \\ + h \int_0^t \left\{ \iint_D \left[(d^* \alpha - h^*) \dot{\tau}_0^2 + \frac{k}{\theta_0} \tau_{0,\alpha} \tau_{0,\alpha} \right] dA \right\} d\tau.$$

If $h^* > 0$, $\alpha > 0$ then from (4.5) we get $\tau_0=0$ and therefore the temperature field is unique.

Received September 10, 1982

Polytechnic Institute, Jassy
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Müller I., Arch. Rational Mech. Anal., **41**, 319 (1971).
2. Green A. E., Lindsay K. A., Jour. Elast., **2**, 1 (1972).
3. Boley B. A., Weiner J. H., *Theory of Thermal Stresses*. New York—London, 1960.
4. Ignaczak J., Nowacki W., Arch. Mech. Stos., **5**—13 (1961).
5. Green A. E., Mathematika, **19**, 37 (1972).

O TEORIE GENERALIZATĂ A TERMOELASTICITĂȚII LINIARE A PLĂCILOR

(Rezumat)

Se consideră deformarea unei plăci în cadrul teoriei generalizate a termoeleasticității propusă de I. Müller. Considerînd placa ca un corp tridimensional se deduc ecuațiile de mișcare prin metoda integrării pe grosimea plăcii. Aceste ecuații se separă în două sisteme ce descriu deformarea în planul median și încovoierea plăcii. Pentru deformarea în planul median se demonstrează unicitatea soluției.

EXISTENȚA ȘI UNICITATEA SOLUȚIEI ÎN TEORIA DINAMICĂ A VÎSCOELASTICITĂȚII LINIARE MICROPOLARE

DE

D. MANOLE

1. Introducere. În acest articol este prezentată o teoremă de existență și unicitate în teoria dinamică a vîscoelasticității liniare micropolare. Existența și unicitatea unei soluții slabe pentru probleme la limită din teoria statică a solidelor elastice micropolare a fost stabilită în [4]. De asemenea, tot în elastostatica micropolară, astfel de teoreme într-o formă simplă sînt date în [3]. În teoria dinamică a elasticității liniare micropolare existența și unicitatea soluției este stabilită în [2] iar teoreme de existență și unicitate în teoria vîscoelasticității liniare sînt prezentate în [1].

2. Ecuații de bază. Fie un mediu vîscoelastic ce ocupă domeniul Ω din spațiul euclidian tridimensional, a cărui închidere este Ω și frontieră (regulată) $\partial\Omega$. Ecuațiile de bază ale teoriei dinamice a vîscoelasticității liniare micropolare sînt:

a) ecuațiile de mișcare

$$(2.1) \quad \begin{aligned} t_{ji,j} + F_i &= \rho(x) u_i'', \\ m_{ji,t,j} + e_{ijk} t_{jk} + M_i &= I_{ij}(x) \omega_j'', \end{aligned}$$

b) ecuațiile geometrice

$$(2.2) \quad \gamma_{ij} = u_{j,i} - e_{kij} \omega_k, \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i};$$

c) ecuațiile constitutive

$$(2.3) \quad \begin{aligned} t_{ij}(x, t) &= \overset{0}{A}_{ijkl}(x) \gamma_{kl} + \overset{0}{B}_{ijkl}(x) \kappa_{kl} + \\ &+ \int_0^t \overset{0}{A}'_{ijkl}(x, t-\tau) \gamma_{kl}(x, \tau) d\tau + \int_0^t \overset{0}{B}'_{ijkl}(x, t-\tau) \kappa_{kl}(x, \tau) d\tau, \\ m_{ij}(x, t) &= \overset{0}{B}_{klij}(x) \gamma_{kl} + \overset{0}{C}_{ijkl}(x) \kappa_{kl} + \\ &+ \int_0^t \overset{0}{B}'_{klij}(x, t-\tau) \gamma_{kl}(x, \tau) d\tau + \int_0^t \overset{0}{C}'_{ijkl}(x, t-\tau) \kappa_{kl}(x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

unde s-au folosit notațiile: u_i — componentele vectorului deplasare; ω_i — componentele vectorului microrotație; γ_{ij} , x_{ij} — componentele cinematice ale deformării; m_{ij} — componentele tensorului cuplu de tensiune; F_i — componentele forței masice; M_i — componentele momentului de masă; e_{ijk} — simbolul alternant; $\rho(x)$, $I_{ij}(x)$, A_{ijkl} , B_{ijkl} , C_{ijkl} mărimile ce caracterizează proprietățile mediului considerat, $A_{ijkl}(x) = A_{ijkl}(x, 0)$ etc. ' desemnează derivata parțială în raport cu timpul iar virgula desemnează derivata parțială în raport cu variabila spațială x_k .

La sistemul de ecuații (2.1) — (2.3) considerat pe $\Omega \times (0, T)$, se adaugă condițiile pe frontieră și condițiile inițiale.

Condițiile pe frontieră, în cazul unei probleme mixte sînt

$$(2.4) \quad u_i(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) \text{ pe } \partial\Omega_u \times (0, T), \quad \omega_i(x, t) = \tilde{\omega}_i(x, t) \text{ pe } \partial\Omega_\omega \times (0, T);$$

$$t_i(x, t) = \tilde{t}_i(x, t) \text{ pe } \partial\Omega_t \times (0, T), \quad m_i(x, t) = \tilde{m}_i(x, t) \text{ pe } \partial\Omega_m \times (0, T),$$

unde n_i sînt cosinuși directori ai normalei exterioare la $\partial\Omega$, $\tilde{u}_i$, $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{t}_i$, $\tilde{m}_i$ fiind funcții prescrise pe frontieră și

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega_\omega \cup \partial\Omega_m, \quad \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega_\omega \cap \partial\Omega_m = \emptyset.$$

Condițiile inițiale au forma

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_i(x, 0) &= a_i(x), & \omega_i(x, 0) &= b_i(x), & x &\in \Omega, \\ u'_i(x, 0) &= c_i(x), & \omega'_i(x, 0) &= d_i(x), & x &\in \Omega. \end{aligned}$$

În cele ce urmează vom presupune că

$$(2.6) \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad I_{ij}(x) = I_{ji}(x), \quad I_{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma\xi_k\xi_k$$

pentru orice $\xi(\xi_i)$, γ fiind o constantă pozitivă, și

$$(2.7) \quad A_{ijkl}^0 = A_{klji}^0, \quad C_{ijkl}^0 = C_{klji}^0.$$

Procedînd ca în [2], introducînd matricele $u(x, t)$ — matricea coloană a elementelor $\{u_i(x, t), \omega_k(x, t)\}_{6 \times 1}$; $I(x)$ — matricea elementelor $\{I_{ij}(x)\}_{3 \times 3}$; $\Gamma(x, t)$ — matricea coloană a elementelor $\{m_{ji,j}(x, t) + e_{ijk}t_{jk}(x, t)\}_{3 \times 1}$; $M(x, t)$ matricea coloană a elementelor $\{M_i(x, t)\}_{3 \times 1}$ și operatorii

$$(Au)_i = -\frac{1}{\rho(x)} t_{ji,j}(x, t), \quad (Au)_{i+3} = -[I^{-1}(x)M(x, t)]_i,$$

ecuațiile (2.1) se pot scrie sub forma

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u''_i + (Au)_i &= f_i, \\ \omega''_i + (Au)_{i+3} &= l_i, \end{aligned}$$

unde

$$(2.9) \quad f_i(x, t) = \frac{1}{\rho(x)} F_i(x, t), \quad l_i(x, t) = [I^{-1}(x)M(x, t)]_i.$$

Cu notațiile făcute, ecuațiile (2.8), (2.4), (2.5), devin

$$(2.10) \quad u'' + Au = f,$$

$$(2.11) \quad u = \tilde{u} \text{ pe } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$p = \tilde{p} \text{ pe } \partial\Omega_p \times (0, T), \quad \partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_p, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_p = \emptyset;$$

$$(2.12) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x),$$

unde $Au, f, \tilde{u}, p, \tilde{p}, u_0, u_1$ sînt matrice de 6×1 elemente :

$$\{(Au)_i, (Au)_{i+3}\}, \{f_i, l_k\}, \{\tilde{u}_i, \tilde{\omega}_{kl}\}, \{t_i, m_k\}, \{\tilde{t}_i, \tilde{m}_k\}, \{a_i, b_k\}, \{c_i, d_k\}.$$

3. Formularea variațională a problemei. Pentru orice pereche de funcții $u = \{u_i, \omega_k\}, v = \{v_i, \varphi_k\}$ introducem formele biliniare

$$(3.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} [A'_{ijkl} \gamma_{ij}(u) \gamma_{kl}(v) + B'_{ijkl} (\gamma_{ij}(u) \kappa_{kl}(v) + \gamma_{ij}(v) \kappa_{kl}(u)) + C'_{ijkl} \kappa_{ij}(u) \kappa_{kl}(v)] dx,$$

$$(3.2) \quad b(t; u, v) = \int_{\Omega} [A'_{ijkl}(t) \gamma_{ij}(u) \gamma_{kl}(v) + B'_{ijkl}(t) (\gamma_{ij}(u) \kappa_{kl}(v) + \gamma_{ij}(v) \kappa_{kl}(u)) + C'_{ijkl}(t) \kappa_{ij}(u) \kappa_{kl}(v)] dx.$$

Dacă se notează

$$(3.3) \quad \mathcal{A}(\gamma_{ij}, \kappa_{ij}) = A'_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + 2B'_{ijkl} \gamma_{ij} \kappa_{kl} + C'_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl}$$

și se presupune că

$$(3.4) \quad \mathcal{A}(\gamma_{ij}, \kappa_{ij}) \geq c \sum_{i,j=1}^3 (\gamma_{ij}^2 + \kappa_{ij}^2), \quad c > 0,$$

se constată imediat, ținînd seama de (2.7), că

$$(3.5) \quad a(u, v) = a(v, u),$$

$$(3.6) \quad a(u, u) = \int_{\Omega} \mathcal{A}(\gamma_{ij}, \kappa_{ij}) dx,$$

$$(3.7) \quad a(v, v) \geq c \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\gamma_{ij}^2(v) + \kappa_{ij}^2(v)) dx$$

$$(3.8) \quad b(t; u, v) = b(t; v, u).$$

Introducînd spațiile

$$V = (H^1(\Omega))^6, \quad H = (L^2(\Omega))^6, \quad V_0 = \{v | v \in V, v = 0 \text{ pe } \partial\Omega_u\}$$

și definind produsul scalar al funcțiilor $u, v \in H$ prin

$$(3.9) \quad (u, v) = \int_{\Omega} (\rho(x) u_i v_i + I_{ij} \omega_j \varphi_k) dx$$

avem

$$(3.10) \quad (Au, v) = a(u, v) + \int_0^t b(t-s; u(s), v) ds - \int_{\partial\Omega} p v d\sigma.$$

Relația (3.10) rezultă imediat înmulțind (2.3)₁ cu $\gamma_{ij}(v)$, (2.3)₂ cu $\kappa_{ij}(v)$, sumând, integrând pe Ω ținând seama de (2.2), (2.11), (3.1), (3.2), (3.9) și aplicând teorema divergenței. Din (2.10) rezultă

$$(3.11) \quad (u'', v) = (Au, v) + (f, v)$$

și deci (3.10) se poate pune sub forma

$$(3.12) \quad (u''(t), v) + a(u(t), v) + \int_0^t b(t-s; u(s), v) ds = (f, v) + \int_{\partial\Omega} p v d\sigma.$$

Deoarece $v=0$ pe $\partial\Omega_u$, din (3.12) se obține

$$(3.13) \quad (u'', v) + a(u, v) + \int_0^t b(t-s; u(s), v) ds = (f, v) + \int_{\partial\Omega_p} p v d\sigma,$$

sau forma echivalentă

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & (u'', v - u') + a(u, v - u') + \int_0^t b(t-s; u(s), v - u') ds = \\ & = (f, v - u') + \int_{\partial\Omega_p} p(v - u') d\sigma, \quad \forall v \in V_0. \end{aligned}$$

Ținând seama de (2.6) se constată imediat că (3.9) verifică proprietățile produsului scalar. Dacă V_0 este dens și continuu scufundat în H și identificăm cu H propriul său dual și cu V_0' dualul lui V_0 , avem $V_0 \subset H \subset V_0'$.

Vom nota cu $|\cdot|$ norma în H și cu $\|\cdot\|$, respectiv $\|\cdot\|_*$ norma în V_0' , respectiv în V_0 . Cu $(\cdot, \cdot)$ vom nota produsul scalar în H .

4. Teorema de existență și unicitate. Înlocuind în relația (3.14) funcția u prin $u - \Phi$, unde $\Phi(t) = \{\Phi_i(t), \Phi_{i+3}(t)\} \in V$ pentru care $\Phi(t) = u(t)$ pe $\partial\Omega_u$, obținem

$$(4.1) \quad (u'', v - u') + a(u, v - u') + \int_0^t b(t-s; u(s), v - u') ds = (L(t), v - u'), \quad \forall v \in V_0.$$

unde

$$(4.2) \quad (L(t), v) = (f(t), v) + \int_{\partial\Omega_p} p v d\sigma - (\Phi''(t), v) - a(\Phi(t), v) - \int_0^t b(t-s; \Phi(s), v) ds,$$

cu condițiile inițiale

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 (= u_0 - \Phi(0)), \\ u'(x, 0) &= u_1 (= u_1 - \Phi'(0)). \end{aligned}$$

Teorema 4.1. *Dacă*

$$(4.4) \quad f, f' \in (L^2(Q))^6, \quad Q = \Omega \times (0, T),$$

$$(4.5) \quad p, p' \in (L^2(\epsilon)), \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(4.6) \quad \Phi, \Phi' \in L^2(0, T; V), \quad \Phi'', \Phi''' \in L^2(0, T; H),$$

$$(4.7) \quad u_0 \in V_0, u_1 \in V, (L(0), v) - a(u_0, v) = (u_2, v), \quad u_2 \in H,$$

atunci există o funcție $u(x, t)$ și numai una pentru care

$$(4.8) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(4.9) \quad u'' \in L^\infty(0, T; H)$$

și verifică (4.1), (4.2).

Demonstrația acestei teoreme se face în mod cu totul analog ca în [1] unde este dovedită existența și unicitatea soluției în teoria dinamică a viscoelasticității liniare. În cursul demonstrației se ține seama și de inegalitatea lui Gronwall.

Primită la 22 ianuarie 1980

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Duvaut G., Lions L., *Les inéquations en Mécanique et Physique*. Dunod, Paris, 1972.
2. Ieșan C. M., *On the Existence and Uniqueness of the Solution of the Dynamic Theory of the Linear Elasticity with Microstructure*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser IV, 22, 329—336 (1974).
3. Ieșan D., *Unele probleme fundamentale ale teoriei liniare a mediilor elastice de tip Cosserat*. În „Probleme actuale în Mecanica Solidelor”, Vol. I, Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1975.
4. Hlaváček M., Hlaváček M., *On the Existence and Uniqueness of Solution and Some Variational Principles in Linear Theories of Elasticity with Couple Stresses*. Aplik. Mat., 14, 387—410 (1969).

L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DANS LE THÉORIE DYNAMIQUE DE LA VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE MICROPOLAIRE

(Résumé)

On présente un théorème d'existence et d'unicité dans la théorie dynamique de la viscoélasticité linéaire micropolaire. Ce problème est réduit à la résolution d'un problème équivalent donné dans [1]. Dans la théorie dynamique de l'élasticité linéaire micropolaire cet théorème se trouve dans [2].

SYSTEMATIC METHODS OF APPROXIMATION IN NONLINEAR THEORY OF COSSERAT MEDIA (I)

BY

I. NISTOR

0. Introduction. The present paper is concerned with the formulation of the basic field equations and constitutive relations of Cosserat solids. In a forthcoming paper (Part II) a perturbation scheme of Signorini's type, for Cosserat media will be given. In Part III, following Rivlin and Topaloglu [1], we present an interpretation of the method.

1. Kinematical Preliminaries. A Cosserat medium is a continuum, each point of which has the six degrees of freedom of a rigid body. Following Toupin [2] a Cosserat continuum is kinematically equivalent to the polar medium, in which the microstructure consists only in a capacity for rotation independent of the macrostrain. The orientation of a given point of such a medium can be represented mathematically by the values of three mutually perpendicular vectors $\mathbf{d}_j$, called the directors.

The triads of directors may rotate independently of the motion of points, but during the motion the directors have to satisfy six equations of Constraints

$$(1.1) \quad \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_k = g_{jk},$$

where g_{jk} is any constant, symmetric, nonsingular, positive definite matrix.

The motion of a typical body point X of polar medium is given by ([3], Sect. 98)

$$(1.2) \quad y_i = y_i(x_j, t), \quad d_{ij} = d_{ij}(x_k, t),$$

where x_i and y_j are the coordinates of the place occupied by the body-point X in the reference configuration B_r and the current configuration B_t , respectively, d_{ij} are the components of the director $\mathbf{d}_i$.

Let the components of the directors at reference configuration be denoted by D_{ij} . In general we have $D_{ij} = D_{ij}(x_k)$, but without loss of generality we may assume that the initial values (reference state values) of the director field are unit vectors along the coordinate axes, i.e.

$$(1.3) \quad D_{ij} = \delta_{ij},$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta.

The directors of a Cosserat medium may be expressed in terms of their values in the reference configuration as follows

$$(1.4) \quad d_{ij}(x_k, t) = R_{jh}(x_k, t) D_{ih}(x_k),$$

where $R_{jh}(x_k, t)$ are the components of a proper orthogonal tensor which measures the rotation of a point in the Cosserat medium.

From the equations (1.2)–(1.4) results that the motion of a Cosserat material is given by

$$(1.5) \quad y_i = y_i(x_k, t), \quad R_{ij} = R_{ij}(x_k, t).$$

The components of a proper orthogonal tensor (relative to an orthonormal basis) may be written in the form [4]

$$(1.6) \quad R_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\varphi_h\varphi_h} \left[\left(1 - \frac{1}{4}\varphi_k\varphi_k\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_j + e_{ijk}\varphi_k \right],$$

where φ_i are the components of the microrotation vector, e_{ijk} is alternating symbol.

The components v_i of the angular velocity vector are given by

$$(1.7) \quad v_i = \frac{1}{2}e_{ijk}R_{jp}\dot{R}_{kp},$$

where a superposed dot indicates material differentiation. From the relation (1.7) we obtain

$$(1.8) \quad \dot{R}_{ij} = e_{ikp}R_{pj}v_k.$$

Using (1.6), it is helpful to express v_i as

$$(1.9) \quad v_i = H_{ki}\dot{\varphi}_k,$$

where

$$(1.10) \quad H_{ki} = \frac{2\delta_{ki} + e_{kij}\varphi_j}{2(1 + \frac{1}{4}\varphi_p\varphi_p)}.$$

It is easy to show that

$$(1.11) \quad H_{ki} = R_{ij}H_{jk} = H_{ij}R_{jk}.$$

2. Balance Law. Let B be an arbitrary configuration of a Cosserat body $\mathcal{B}$ and let A be a set of B occupied by the body points in an arbitrary subset $\mathcal{A}$ of $\mathcal{B}$. The mass content of A , denoted by $m(A)$, is identified with the mass $m(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$, and we refer henceforth to $\mathcal{A}$ as the material occupying A . Thus in any configuration B there exists an integrable scalar field ρ defined on B , such that

$$(2.1) \quad m(\mathcal{A}) = m(A) = \int_A \rho dv;$$

ρ is called the mass density in the configuration B .

The mass content $m(V_t)$ of an arbitrary material region V_t in the current configuration B_t is equal to the mass $m(\mathcal{O})$ of the material $\mathcal{O}$ occupying v_t at time t . Since $m(\mathcal{O})$ does not depend upon t we deduce directly from (2.1) the principle of mass conservation

$$(2.2) \quad m(\mathcal{O}) = \int_{V_r} \rho_r dv = \int_{V_t} \rho dv,$$

where V_r is a subset of B_r occupied by the body points of $\mathcal{O}$. From (2.2) it follows that

$$(2.3) \quad \rho_r = J \rho,$$

where $J = \det(y_i, x_i)$.

The linear momentum $M(V_t)$ of the material occupying V_t is defined by

$$M(V_t) = \int_{V_t} \rho \mathbf{u} dv.$$

The moment of momentum of the same material is defined by [5]

$$L(V_t) = \int_{V_t} \rho (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + i_{jk} \mathbf{d}_j \times \dot{\mathbf{d}}_k) dv.$$

Here $\times$ denotes the vectorial product, $\mathbf{r}$ is the position vector of a representative point of V_t , i_{jk} are coefficients of the microinertia and

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} i_{jk} = 0, \quad i_{jk} = i_{kj}.$$

The kinetic energy, $K(V_t)$ of the material occupying V_t is defined by [5]

$$K(V_t) = \frac{1}{2} \int_{V_t} \rho (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + i_{jk} \dot{\mathbf{d}}_j \cdot \dot{\mathbf{d}}_k) dv.$$

At each point in the interior of the subdomain V_t we define a body force vector $\mathbf{F}$, we also associate a generalized body force $\mathbf{B}_j$ with each director $\mathbf{d}_j$ which occurs at this point. Similarly at each point on the boundary ∂V_t of the subdomain we define a surface force vector $\mathbf{f}$ and associate a generalized surface traction vector $\mathbf{h}_j$ with each director $\mathbf{d}_j$ which occurs at this point. The total force acting on V_t is given by

$$\mathbf{R} = \int_{V_t} \rho \mathbf{F} dv + \int_{\partial V_t} \mathbf{f} ds.$$

The resultant moment of forces calculated with respect to the origin of the reference frame is expressed by

$$\int_{V_t} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{d}_j \times \mathbf{B}_j) dv + \int_{\partial V_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{d}_j \times \mathbf{b}_j) ds.$$

The postulated laws of classical mechanics assert that there exists a frame in which

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{u}} dv = \int_{V_t} \rho \mathbf{F} dv + \int_{\partial V_t} \mathbf{f} ds,$$

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + i_{jk} \mathbf{d}_j \times \dot{\mathbf{d}}_k) dv = \int_{V_t} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{d}_j \times \mathbf{B}_j) dv + \int_{\partial V_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{d}_j \times \mathbf{b}_j) ds,$$

for every subset V_t .

These two equations express the balance of momentum and the balance of moment of momentum, respectively.

We now postulate that the energy balance for subdomain V_t is given by

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \frac{\rho}{2} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + i_{jk} \dot{\mathbf{d}}_j \cdot \dot{\mathbf{d}}_k + 2U) dv = \int_{V_t} \rho(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_j \cdot \dot{\mathbf{d}}_j + h) dv + \int_{\partial V_t} (\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b}_j \cdot \dot{\mathbf{d}}_j + q_n) ds.$$

In this equation we have used the following notation: U — internal energy density, h — heat supply density, $q_{(n)}$ — heat flux across the surface ∂V_t .

We postulate that the production of entropy satisfies the inequality

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \eta dv \geq \int_{V_t} \rho \frac{h}{T} dv + \int_{\partial V_t} \frac{q_{(n)}}{T} ds,$$

where η is the entropy density function and T is the absolute temperature.

With the help of relation (1.3), (1.4) and (1.8), the equations (2.6) and (2.7) can be written as

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(e_{ijk} y_j \dot{u}_k + \sigma_i) dv = \int_{V_t} \rho(e_{ijk} y_j F_k + G_i) dv + \int_{\partial V_t} (e_{ijk} y_j f_k + g_i) ds,$$

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho}{2} (\dot{u}_i \dot{u}_i + \sigma_j v_j + 2U) dv = \int_V \rho (F_i \dot{u}_i + G_j v_j + h) dv + \\ + \int_{\partial V} (f_i \dot{u}_i + g_j v_j + q_{(n)}) ds,$$

where

$$(2.11) \quad G_j = e_{jkt} R_{kp} B_{pt},$$

$$g_j = e_{jkt} R_{kh} b_{ht},$$

$$(2.12) \quad J_{nm} = R_{np} R_{mq} I_{pq},$$

$$I_{pq} = i_{jj} \delta_{pq} - i_{pq},$$

$$(2.13) \quad \sigma_i = J_{ik} v_k.$$

In the above relations the functions G_i and g_i are components of the body couple density and couple stress vector, respectively; σ_i are the components of the microspin vector. Material differentiation of equation (2.12), yields

$$(2.14) \quad \dot{J}_{qn} = e_{qrp} J_{pn} v_r + e_{njk} J_{qk} v_j.$$

The integral laws (2.5), (2.9), (2.10) lead to the following equations and boundary conditions [6]

$$(2.15) \quad \tau_{ij,i} + \rho F_j = \rho \ddot{u}_i, \quad \pi_{ij,i} + e_{jik} \tau_{ik} + \rho G_j = \rho \dot{\sigma}_j,$$

$$(2.16) \quad \tau_{ij} n_i = f_j, \quad \pi_{ij} n_i = g_j, \quad q_i n_i = q_{(n)},$$

$$(2.17) \quad \ddot{U} = \tau_{ki} (\dot{u}_{i,k} + e_{ikp} v_p) + \pi_{ij} v_{j,i} + q_{k,k} + \rho h,$$

$$(2.18) \quad T \rho \dot{\eta} - \rho h - q_{i,i} + \frac{1}{T} q_i T_{,i} \geq 0,$$

where τ_{ij} and π_{ij} are the components of the stress tensor and couple stress tensor measured per unit area in B_t , q_i are the components of heat flux vector per unit area in B_t , n_i are the components of the outward unit normal to ∂V_t , the comma denotes partial derivation with respect to the variables y_j .

Combining now (2.17) with the Clausius-Duhem inequality (2.18) we obtain

$$(2.19) \quad -\rho (\dot{\psi} + \eta \dot{T}) + \tau_{ij} (\dot{u}_{j,i} + e_{jik} v_k) + \pi_{ij} v_{j,i} + \frac{1}{T} q_i T_{,i} \geq 0,$$

where $\psi = U - T\eta$ is the free energy.

We can express the various fields in (2.15)–(2.17) in terms of the referential coordinates x_i and time t , also. In this sense we have the following equations

$$(2.20) \quad s_{ij,i} + \rho_r F_j = \rho_r \ddot{u}_j, \quad \mu_{j,i} + e_{ijk} y_{j,h} s_{hk} + \rho_r G_i = \rho_r \dot{\sigma}_i,$$

$$(2.21) \quad s_{kj} N_k = f_j, \quad \mu_{ji} N_j = g_i, \quad Q_i N_i = q_{(n)}.$$

In the above expressions ρ_r denotes the density field in B_r , N_i are the components of the unit outward normal to ∂B_r , symbol i denotes partial differentiation with respect to x_i , s_{ij} , μ_{ij} and Q_i are the components of the stress tensor, couple stress tensor and heat flux vector measured per unit area in B_r , defined by

$$(2.22) \quad s_{ik} = \int x_{i,p} \tau_{pk}, \quad \mu_{ik} = \int x_{i,h} \pi_{hk},$$

$$(2.23) \quad Q_i = \int x_i q_j.$$

3. Constitutive Equations. In continuum mechanics it is known that the most general constitutive equation is a functional of the motion and temperature. For polar media, the motion is given by $y_i(x_j, t)$, $d_j(x_k, t)$. We may, therefore, define a thermoelastic Cosserat medium as having constitutive equations given by

$$(3.1) \quad \psi = \psi(z), \quad q_i = q_i(z), \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}(z), \quad \pi_{ij} = \pi_{ij}(z),$$

where the argument z is the set of variables

$$z = \{y_{i,j}, d_{hk}, d_{rs,t}, T_{,j}, T, x_k\}.$$

From the relations (1.4), (1.5) and (1.8) we obtain

$$(3.2) \quad \dot{y}_{i,j} = \dot{u}_{i,k} y_{k,j}, \quad \dot{d}_{hk} = e_{kpq} d_{hq} v_p,$$

$$\dot{d}_{jk,h} = e_{kpq} (d_{jq,h} v_p + d_{jq} v_{p,h}).$$

The functions occurring in the constitutive relations (3.1) must be of such a kind that (2.19) is satisfied for every motion and temperature field.

Differentiating (3.1), we find that

$$(3.3) \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial y_{i,j}} \dot{y}_{i,j} + \frac{\partial \psi}{\partial d_{jk}} \dot{d}_{jk} + \frac{\partial \psi}{\partial d_{jk,h}} \dot{d}_{jk,h} + \frac{\partial \psi}{\partial T_{,k}} \dot{T}_{,k} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}.$$

Combining (2.19), (3.2) and (3.3) we find that the Clausius-Duhem inequality is equivalent to

$$(3.4) \quad \left(\tau_{ij} - \rho y_{i,k} \frac{\partial \psi}{\partial y_{j,k}} \right) \dot{u}_{j,i} + \left(\pi_{ij} - \rho y_{i,p} e_{jqk} d_{hq} \frac{\partial \psi}{\partial d_{hk,p}} \right) v_{j,i} - \\ - \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + \eta \right) \dot{T} + \left(\tau_{ij} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{kj}} d_{kj} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{hj,q}} d_{hj,q} \right) e_{jip} v_p + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0.$$

Since this inequality must be valid for arbitrary $\dot{u}_{i,j}$, v_p , $v_{p,q}$, $\dot{T}_{,j}$, T we conclude that

$$(3.5) \quad \tau_{ij} = \rho y_{i,k} \frac{\partial \psi}{\partial y_{j,k}}, \quad \pi_{ij} = \rho y_{i,p} e_{jqk} d_{hq} \frac{\partial \psi}{\partial d_{hk,p}},$$

$$(3.6) \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T},$$

$$(3.7) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_{j,k}} y_{i,k} + \frac{\partial \psi}{\partial d_{kj}} d_{kj} + \frac{\partial \psi}{\partial d_{pj,q}} d_{pj,q} \right) e_{j,h} = 0,$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial \psi}{\partial T_{,j}} = 0,$$

that is

$$(3.9) \quad \psi = \psi(y_{i,j}, d_{ij}, d_{kh,p}, T, x_i).$$

Relations (2.17) and (2.19) reduce to

$$(3.10) \quad \rho \dot{\eta} T = q_{j,j} + \rho h, \quad \frac{1}{T} q_i T_{,i} \geq 0.$$

By the usual procedure [3] we can prove that

$$(3.11) \quad q_i(y_{h,j}, d_{rs}, d_{pq}, 0, T, x_k) = 0.$$

The relations (2.22) become

$$(3.12) \quad s_{ij} = \frac{\partial \psi_r}{\partial y_{j,i}}, \quad \mu_{ij} = e_{jqd} d_{hq} \frac{\partial \psi_r}{\partial d_{hp,i}},$$

where $\psi_r = \rho_r \psi$ is the free energy per unit volume in B_r . The principle of frame-indifference of ψ_r may be stated as the requirement that

$$(3.13) \quad \psi_r(Q_{ij} y_{j,h}, Q_{ij} d_{kj}, Q_{ij} d_{kj,p}, T, x_k) = \psi_r(y_{h,k}, d_{ij}, d_{ij,k}, T, x_i)$$

for all orthogonal tensor $Q = (Q_{ij})$.

In fact, as Toupin [2] observed, it suffices to consider only proper orthogonal tensor. Choosing $Q = R'$ (R' denotes the transpose of microrotation tensor) yields [9]

$$(3.14) \quad \psi_r(y_{i,j}, d_{jk}, d_{pq,i}, T, x_i) = \psi_r(y_{j,k} R_{ji}, R_{ji} R_{jk,h}, D_{kj}, T, x_i).$$

Since $R_{ji} R_{jp,q} = R_{jia} R_{jp,q}$, we may introduce the tensor γ_{ij} such that

$$(3.15) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} e_{jmn} R_{km,i} R_{kn}.$$

Substitution of (1.4) and (3.15) into (3.14) yields

$$(3.16) \quad \psi_r = \psi_r(c_{ij}, \gamma_{pq}, T, x_i),$$

where

$$(3.17) \quad c_{ij} = y_{k,i} R_{kj}.$$

If the free energy has form (3.16), then the equations (3.6) are satisfied identically. It can be shown that the general solution of the equations (3.6) has form (3.16).

By an argument similar to the one leading from (3.13) to (3.16) we obtain that

$$(3.18) \quad Q_i = Q_i(c_{kj}, \gamma_{pq}, T_{,k}, T, x_i).$$

The relations (3.12) become

$$(3.19) \quad s_{ij} = \frac{\partial \psi_r}{\partial c_{ik}} R_{jk}, \quad \mu_{ij} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \gamma_{ik}} R_{jk}.$$

Let us introduce the tensors

$$(3.20) \quad t_{ik} = s_{ip} R_{pk} = \frac{\partial \psi_r}{\partial c_{ik}}, \quad m_{ik} = \mu_{ip} R_{pk} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \gamma_{ik}}.$$

In the terms of the above tensors, the equations of motion (2.20) and boundary conditions (2.21) may be expressed as

$$(3.21) \quad (R_{ij} t_{kj})_{,k} + \rho_r F_i = \rho_r \ddot{u}_i, \quad (R_{ij} m_{kj})_{,k} + e_{ijk} \gamma_{j,p} R_{kp} t_{pq} + \rho_r G_i = \rho_r \dot{\sigma}_i,$$

$$(3.22) \quad R_{ij} t_{kj} N_k = f_i, \quad R_{ij} m_{kj} N_k = g_i.$$

For the deformation of position it is convenient to introduce the strain tensor

$$(3.23) \quad e_{ij} = c_{ij} - \delta_{ij}.$$

We assume that the points of the elastic Cosserat medium suffer infinitesimal displacement gradients, the director triads suffer infinitesimal rotations and the increments of temperature are inconsiderable ($|T - T_r| \ll T_r$). In this case the equations (2.15)–(2.18), (3.15), (3.18) and (3.25) coincide with the basic equations of linear theory of micropolar thermoelasticity [6].

4. Equations of Elastic Equilibrium. In what follows we shall disregard all non-mechanical influences and we shall assume that the state of the body is determined by its motion alone.

A hyperelastic Cosserat medium is characterized by a scalar stored energy function. Let W be the strain energy measured per unit volume in a homogeneous reference configuration. From (3.16) we have

$$(4.1) \quad W = W(c_{ij}, \gamma_{pq}).$$

From the relations (2.11), (3.21) and (3.22) it follows that the equilibrium equations of the elastic Cosserat medium may be written in the form

$$(4.2) \quad (R_{ij} t_{kj})_{,k} + \rho_r F_i = 0, \quad (R_{ij} m_{kj})_{,k} + e_{ijk} \gamma_{j,p} R_{kp} t_{pq} + \rho_r e_{ijk} R_{jp} B_{pk} = 0,$$

where

$$(4.3) \quad t_{kj} = \frac{\partial W}{\partial c_{kj}}, \quad m_{kj} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{kj}}.$$

When the external body force F_i and external generalized body force B_{kj} are given as functions of x_i , (4.2) becomes a quasi-linear differential equation of second order for determining the deformation $y_i(x_j)$ and micro-

rotation $\varphi_i(x_j)$, when suitable boundary conditions are satisfied. In the case of prescribed of surface forces $f_i(x_k)$ and generalized surface forces $b_{ij}(x_k)$, the boundary conditions are written as

$$(4.4) \quad R_{ij}t_{kj}N_k = f_i, \quad -R_{ij}m_{kj}N_k = e_{ipq}R_{ph}b_{hq}.$$

Any solution of a boundary value problem in statics must be such that the total force and total torque acting upon the body in the configuration of equilibrium must vanish

$$(4.5) \quad \int_{B_i} \rho F_i dv + \int_{\partial B_i} f_i ds = 0,$$

$$(4.6) \quad \int_{B_i} \rho e_{ijk}(y_j F_k + R_{jp} B_{pk}) dv + \int_{\partial B_i} e_{ijk}(y_j f_k + R_{jp} b_{pk}) ds = 0.$$

Transforming variables so as to integrate over the reference configuration, we have the equivalent conditions

$$(4.7) \quad \int_{B_r} \rho_r F_i dv + \int_{\partial B_r} f_i ds = 0,$$

$$(4.8) \quad e_{ijk} \left[\int_{B_r} \rho_r (y_j F_k + R_{jh} B_{hk}) dv + \int_{\partial B_r} (y_j f_k + R_{jh} b_{hk}) ds \right] = 0,$$

where y_i are the coordinates of the place occupied by the body point in B_i but now are expressed as functions of x_j .

The conditions (4.7) are necessary conditions that the boundary data f_i must satisfy if the problem is to have a solution. The conditions (4.9), however, since they involve the coordinates of the place occupied by the points body in the deformed state and the components of the microrotation, cannot be checked directly when only the differential equation and the boundary data are known. As in classical theory of finite elastic deformation [7] the conditions (4.8) are to be regarded as conditions of compatibility to be satisfied by any solution of the boundary value problem (4.2) and (4.3).

We introduce the following notations

$$(4.9) \quad M_i = e_{ijk} \left[\int_{B_r} \rho_r (x_j F_k + B_{jk}) dv + \int_{\partial B_r} (x_j f_k + b_{jk}) ds \right],$$

$$(4.10) \quad A_{ij} = \int_{B_r} \rho_r (x_i F_j + B_{ij}) dv + \int_{\partial B_r} (x_i f_j + b_{ij}) ds.$$

A uniform rotation $Q = (Q_{ij})$ about the origin change coordinates x_i into $\tilde{x}_i = Q_{ij}x_j$ and the components D_{ij} into $\tilde{D}_{ij} = Q_{jh}D_{ih}$.

From (4.10), if B_r is rotated by Q but $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{b}_j$, are kept fixed, the A_{ij} become $\tilde{A}_{ij} = Q_{ih}A_{hj}$. The torque vanishes after rotation if and only if $\tilde{A}_{ij}$ is symmetric, i.e. if only if

$$(4.11) \quad Q_{ik}A_{kj} - Q_{jh}A_{hi} = 0.$$

The equations (4.11) have at least four solutions ([3], Sect. 44). We have the following version of Da Silva's theorem [8]. The total torque of any system of loads acting on a Cosserat medium can be made to vanish by subjecting the body to a suitable rigid rotation about the origin.

Applying Da Silva's theorem to reference configuration we see that a change of reference configuration by a rigid rotation can always be found such that, after the change, the equation

$$(4.12) \quad e_{ijk} \left[\int_{B_r} \rho_r (x_j F_k + D_{jh} B_{hk}) dv + \int_{\partial B_r} (x_j f_k + D_{jh} b_{hk}) ds \right] = 0$$

is satisfied.

Therefore, it is usually no loss of generality to assume, that the boundary data satisfy not only the condition (4.8) but also the condition (4.12). Substitution (1.3) into (4.12) yields

$$(4.13) \quad e_{ijk} \left[\int_{B_r} \rho_r (x_j F_k + B_{jk}) dv + \int_{\partial B_r} (x_j f_k + b_{jk}) ds \right] = 0.$$

Subtracting (4.13) from (4.9), we see that the conditions of compatibility may be written in the form

$$(4.14) \quad e_{ijk} \left\{ \int_{B_r} \rho_r [u_j F_k + (R_{jh} - \delta_{jh}) B_{hk}] dv + \int_{\partial B_r} [u_j f_k + (R_{jh} - \delta_{jh}) b_{hk}] ds \right\} = 0.$$

5. Axis of Equilibrium. The system of forces

$$(5.1) \quad \mathbf{h} = (\mathbf{F}, \mathbf{f}, \mathbf{B}_i, \mathbf{b}_j)$$

we called the system of loads or loads.

We say that the system of loads (5.1) is equilibrated in the configuration B if $\mathbf{R} = 0$ and $\mathbf{M}_i = 0$ (or equivalently $A_{ij} = A_{ji}$). As in classical mechanics [10], we say that an equilibrated load system possesses an axis of equilibrium, if there exists an axis such that any rotation of B about it while the vectors $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{b}_j$ are held constant in space, maintains the equilibrium of the load system.

Let $\mathbf{v} = (v_i)$ be a unit vector in the direction of axis δ . From (1.6) it follows that a rotation of amount 2φ about this axis is given by

$$(5.2) \quad Q_{ij} = \frac{1}{1 + \varphi^2} [(1 - \varphi^2) \delta_{ij} + 2\varphi^2 v_i v_j + 2\varphi e_{jik} v_k].$$

If the body is rotated by $Q = (Q_{ij})$ but the loads system is kept fixed the total torque after the rotation is given by

$$(5.3) \quad \tilde{M}_i = \frac{1}{1+\varphi^2} [(1-\varphi^2)e_{ipq}A_{pq} + 2\varphi^2 e_{ijk}v_jv_kA_{hk} + 2\varphi e_{ijk}e_{hjp}v_pA_{hk}].$$

From the relations (5.3) follows that the equilibrated loads system (5.1) admits an axis of equilibrium if and only if

$$(5.4) \quad e_{ijk}v_jv_kA_{hk}=0, \quad e_{ijk}e_{hjp}v_pA_{hk}=0.$$

It is easily seen that (5.4) is equivalent to

$$(5.5) \quad (A_{ij} - \delta_{ij}A_{pp})v_j = 0.$$

For δ to be an axis of equilibrium, the vector v cannot vanish identically. So the determinant of the system (5.5) must vanish. A necessary and sufficient condition for a system of loads to have an axis of equilibrium is

$$(5.6) \quad \det(A_{ij} - \delta_{ij}A_{pp}) = 0.$$

Received May 12, 1981

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Rivlin R. S., Topakoglu C., *A Theorem in Theory of Finite Elastic Deformations*. J. Rational Mech. Anal., 3, 581–589 (1954).
2. Toupin R. A., *Theories of Elasticity with Couple-Stress*. Arch. Rational Mech. Anal., 17, 85–112 (1964).
3. Truesdell C., Noll W., *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Encycl. of Physics, Vol. III/3, Springer, Berlin.
4. Nistor I., *On Finite Deformation of Elastic Cosserat Continuum*. Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVI), 1–2, s.IV, 20–24 (1976).
5. Stojanovici R., *The Nonlinear Elastic Cosserat Continua*. Symposium on Micropolar Elasticity, C.I.S.M., Udine, June 1972.
6. Nowacki W., *Theory of Micropolar Elasticity*. Springer, 1977.
7. Signorini A., *Sulle deformazioni termoelastiche finite*. Proc. 3rd. Int. Congr. Appl. Mech., 2, 80–89 (1930).
8. Da Silva D. A., *Memoria sibre a rotaçao das forcas em torno dos pontos d'applicação*. Mem. Ac. R. Sci. Lisboa, II, 3(I) (1851).
9. Kafadar C. B., Eringen A. C., *Micropolar Media*. (I) *The Classical Theory*. Int. J. Engng. Sci., 9, 271–305 (1971).
10. Bottasso M., *Astaticque*. Mattei, Pavia, 1915.

METODE SISTEMATICE DE APROXIMARE ÎN TEORIA NELINIARĂ A MEDIILOR COSSERAT (I)

(Rezumat)

În această primă parte se deduc ecuațiile fundamentale și relațiile constitutive ale mediilor Cosserat. În partea II se va da o schemă de perturbare de tip Signorini pentru ecuațiile neliniare ale mediilor Cosserat, pentru ca în partea a treia, urmînd pe Rivlin și Topakoglu [1], să se prezinte o interpretare fizică a metodei folosite.

PULSATILE FLOW OF A BINARY MIXTURE OF INCOMPRESSIBLE FLUIDS

BY

VALERIU AL. SAVA

Mixtures of fluids which are viscous in the sense that their constitutive equations contains gradients of the velocity fields of the constituents have been considered in the context of the continuum theory by Green and Naghdi [1], Bowen [2] and Green and Naghdi [3].

In the present work, pulsatile flow of the binary mixture of fluid through a rigid circular tube due to a sinusoidally varying pressure gradient is analyzed.

The vectorial form of the governing field equations of a binary mixture of incompressible fluids are [3]

$$(1) \quad -\nabla p_1 + (\mu_1 + \frac{1}{2} D_3) \Delta \mathbf{u} + (\mu_3 - \frac{1}{2} D_3) \Delta \mathbf{v} + (D_4 - \frac{1}{2} D_2) [\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{v}] - D_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \rho_1 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \rho_1 \mathbf{F},$$

$$(2) \quad -\nabla p_2 + (\mu_4 - \frac{1}{2} D_3) \Delta \mathbf{u} + (\mu_2 + \frac{1}{2} D_3) \Delta \mathbf{v} - (D_4 - \frac{1}{2} D_2) [\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{v}] + D_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \rho_2 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] - \rho_2 \mathbf{G},$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

where $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — velocity vectors of the 1 and 2-constituents, respectively; p_α — thermodynamic pressure of the α th constituent; ρ_α — the density of the α th constituent; $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ — body force per unit mass of the 1 and 2 constituent, respectively; D_s, μ_s — material and viscosity coefficients.

The flow to be considered is through a rigid circular tube with the radius R_0 . It will be assumed that body forces are absent. We chose cylindrical polar coordinates (r, θ, z) such that $r=0$ is the axis of symmetry for the tube. A solution is sought in which

$$(5) \quad \mathbf{u} = (0, 0, u(r, t)), \quad \mathbf{v} = (0, 0, v(r, t)).$$

Substitution of (5) into Eqs. (1)–(2) gives the following system of partial differential equations for $u(r, t)$ and $v(r, t)$

$$(6) \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + (D_4 - \frac{1}{2} D_2) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

$$(8) \quad -\frac{\partial p_1}{\partial z} + (\mu_1 + \frac{1}{2} D_3) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + (\mu_3 - \frac{1}{2} D_3) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] -$$

$$-D_1(u-v) = \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$(9) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} - (D_4 - \frac{1}{2} D_2) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

$$(10) \quad -\frac{\partial p_2}{\partial z} + (\mu_4 - \frac{1}{2} D_3) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + (\mu_2 + \frac{1}{2} D_3) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] +$$

$$+ D_1(u-v) = \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

It follows immediately from (6) that $p_1 + p_2$ is independent of r . In addition (7) and (9) imply that $p_1 + p_2$ is independent of θ . Let us assume a sinusoidal pressure gradient of the form

$$(11) \quad -\frac{\partial}{\partial z} (p_1 + p_2) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ p_m + p_0 \sin \omega t, & t \geq 0, \end{cases}$$

where p_m — mean pressure gradient; p_0 — amplitude of sinusoidal pressure gradient; ω — circular frequency of oscillation. If we define $\varepsilon = p_0/p_m$, then

$$(12) \quad -\frac{\partial}{\partial z} (p_1 + p_2) = p_m (1 + \varepsilon \sin \omega t).$$

Summation of equations (8) and (10) gives

$$(13) \quad -\frac{\partial}{\partial z} (p_1 + p_2) + (\mu_1 + \mu_4) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\mu_2 + \mu_3) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Substituting equation (12) into (13) yields

$$(14) \quad (\mu_1 + \mu_4) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\mu_2 + \mu_3) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + p_m (1 + \varepsilon \sin \omega t) = \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Eqs. (7) and (9) are satisfied if $\partial p_1 / \partial \theta$ and $\partial p_2 / \partial \theta$ are functions of t only. The most general form of p_1 and p_2 is

$$p_1 = -c(t)\theta + f_1(z, t), \quad p_2 = c(t)\theta + f_2(z, t).$$

Because the flow is axisymmetric it follows that $c(t) \equiv 0$. As a result Eqs. (7) and (9) give $u(t) = v(t)$.

Note that flow of mixture through a circular tube due to a sinusoidally

varying pressure is as the flow of a fluid with viscosity $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$.

Equation (14) reduces to

$$(15) \quad \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + p_m (1 + \varepsilon \sin \omega t) = \rho \frac{\partial u}{\partial t},$$

where $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

A solution for the equation (15) can be obtained through application of consecutive transformations: a finite Hankel transform is made on the space variable followed by a Laplace transform on time.

If we made a Hankel transform [4]

$$\mathcal{H}_\mu \{f(x)\} = \int_0^a x f(x) J_\mu(\xi_i x) dx$$

on equation (15) one obtains

$$(16) \quad \mu [-\xi_i^2 \bar{u}_j + R_0 u(R_0, t) J_1(R_0 \xi_i)] + p_m (1 + \varepsilon \sin \omega t) \int_0^{R_0} r J_0(r \xi_i) dr = \rho \frac{d \bar{u}_j}{dt},$$

where $\bar{u}_j = \mathcal{H}_0 \{u(r, t)\}$. Eq. (16) can be simplified by applying the classical „no-slip“ boundary condition $u(R_0, t) = v(R_0, t) = 0$. Hence equation (16) reduces to

$$(17) \quad -\mu \xi_i^2 \bar{u}_j + p_m (1 + \varepsilon \sin \omega t) \frac{R_0}{\xi_i} J_1(R_0 \xi_i) = \rho \frac{d \bar{u}_j}{dt}.$$

Now, taking the Laplace transform of equation (17) with respect to time yields

$$(18) \quad -\mu \xi_i^2 \bar{u}_j^* + \frac{p_m R_0}{\xi_i^2} \left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon \omega}{s^2 + \omega^2} \right) J_1(R_0 \xi_i) = \rho (s \bar{u}_j^* - \bar{u}_j(\xi_i, 0)),$$

where $\bar{u}_j^* = \mathcal{L}\{\bar{u}_j(\xi_i, t)\}$.

Referring back to (11) we see that the assumed pressure gradient functionality implies the „start-up“ problem. Hence $u(r, 0) = v(r, 0)$, therefore,

$$\bar{u}_j(\xi_i, 0) = \mathcal{H}_0 \{u(r, 0)\} = 0.$$

The last result allow us to simplify equation (18) to the form

$$(19) \quad [\rho s + \mu \xi_i^2] \bar{u}_j^* = \frac{p_m R_0}{\xi_i} \left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon \omega}{s^2 + \omega^2} \right) J_1(R_0 \xi_i).$$

The solution of equation (19) is

$$(20) \quad \bar{u}_j^* = \frac{p_m R_0}{\xi_i} \left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon \omega}{s^2 + \omega^2} \right) \frac{J_1(R_0 \xi_i)}{\rho s + \mu \xi_i^2}.$$

Using the inverse Laplace transform in (20) we obtain

$$\bar{u}_j(\xi_i, t) = \frac{p_m R_0 J_1(R_0 \xi_i)}{\mu \xi_i^2} + \frac{p_m R_0 \varepsilon J_1(R_0 \xi_i)}{\xi_i (\mu^2 \xi_i^4 + \rho^2 \omega^2)} [\mu \xi_i^2 \sin \omega t - \omega \rho \cos \omega t] -$$

$$-\frac{p_m R_0 J_1(R_0 \xi_i) [\mu^2 \xi_i^4 - \mu \xi_i^2 \varepsilon \omega \rho + \rho^2 \omega^2]}{\mu \xi_i^2 (\mu^2 \xi_i^4 + \rho^2 \omega^2)} e^{-\frac{\mu \xi_i^2}{\rho} t},$$

and then by inverse finite Hankel transform [4] yields

$$(21) \quad u(r, t) = \frac{2}{R_0^2} \sum_i \bar{u}_j(\xi_i, t) \frac{J_0(r \xi_i)}{\{J_1(R_0 \xi_i)\}^2} = v(r, t).$$

Eq. (21) represents the exact solution of the velocity profile of mixture through a circular tube.

If we allow time to approach infinity the transient solutions approach the steady pulsatile velocity, i.e.

$$(22) \quad u(r, t) = v(r, t) = \frac{p_m}{\mu R_0} \sum_i \frac{J_0(r \xi_i)}{\xi_i J_1(R_0 \xi_i)} \left[\frac{1}{\xi_i^2} + \frac{\varepsilon}{\mu^2 \xi_i^4 + \rho^2 \omega^2} (\mu \xi_i^2 \sin \omega t - \omega \rho \cos \omega t) \right].$$

Received June 2, 1981

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Green A. E., Naghdi P. M., Arch. Rational Mech. Analysis, **24**, 243–263 (1967).
2. Bowen R. M., Arch. Rational Mech. Analysis, **24**, 370–403 (1967).
3. Green A. E., Naghdi P. M., Int. J. Engng. Sci., **3**, 231–241 (1965).
4. Sneddon I. N., Phil. Mag., **37**, 17–27 (1946).

CURGAREA PULSANTĂ A UNEI MIXTURI DE DOUĂ FLUIDE INCOMPRESIBILE

(Rezumat)

Se studiază curgerea pulsantă a unei mixturi de două fluide incompresibile printr-un tub circular sub efectul unui gradient de presiune ce variază sinusoidal.

ASUPRA TERMODINAMICII UNOR FLUIDE SIMPLE ASOCIATE CU VITEZA UNDELOR FINITĂ¹⁾

DE

CORINA FETECĂU și C. FETECĂU

1. Introducere. În istoria recentă a mecanicii mediilor continue, paralel cu tendința de generalizare a modelelor existente se observă consecvența cercetărilor în ideea îmbunătățirii acestora. Asemenea îmbunătățiri au apărut în primul rând ca rezultat al unor noi presupuneri constitutive cum ar fi aceea a lui Gurtin și Pipkin [1] în care g' a fost înlocuit prin $\bar{g}'$.

Dintre extensiile acestei teorii la medii deformabile amintim pe cele ale lui McCarthy [2] și Kosinski [3] în care restricțiile impuse de inegalitatea Clausius-Duhem (C-D) sînt găsite fără a se ține cont de tipul de material. Cum însă referirea la un material sau altul conduce la rezultate diferite și cu atît mai consistente cu cît grupul de izotropie al acestuia este mai bogat, ne propunem aici să facem un studiu termodinamic al fluidelor simple corespunzătoare acestor extensii. Rezultatele obținute, înglobînd unele restricții impuse de principiul obiectivității, diferă ca formă și conținut de cele anterioare. În plus formele integrale obținute pentru tensiune și flux permit abordarea unor probleme de existență și unicitate pentru cazul neliniar.

2. Ecuații constitutive și principii termomecanice. Un obiect fizic poate fi descris matematic prin conceptul de corp B (adică o mulțime de puncte materiale $X, Y, Z, \dots$), înzestrat cu o clasă de aplicații $K: B \rightarrow R^3$ numite configurații. Într-o configurație de referință K_0 punctele corpului pot fi raportate la un sistem de coordonate X^k . La momentul t corpul va ocupa o configurație instantanee K_t iar punctele sale vor ocupa pozițiile x^k în spațiu.

Relațiile

$$(2.1) \quad x = x(X, t), \quad (x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, t)),$$

reprezintă ecuațiile de mișcare sau deformare ale acestuia, iar

$$(2.2) \quad F = F(t) = F(X, t) = \nabla x(X, t),$$

1) Prezentată la Colocviul de Mecanica fluidelor și aplicațiile ei tehnice, Constanța 10-11 octombrie 1980.

este numit gradient de deformare. Presupunem în continuare că este posibil și natural să vorbim de un câmp de temperatură $\theta = \theta(t) = \theta(\mathbf{x}, t)$ a corpului în diferitele sale configurații și notăm prin $\mathbf{g}$ gradientul său spațial. Prin istoria integrată a acestuia înțelegem funcția

$$(2.3) \quad \bar{\mathbf{g}}(\tau) = \int_{\tau}^t \mathbf{g}(\sigma) d\sigma.$$

Definiția 2.1. Numim stare termomecanică în particula $\mathbf{x}$ și la momentul t , ansamblul funcțiilor

$$(2.4) \quad \varphi = (\mathbf{T}, \mathbf{q}, \psi, \eta),$$

în care $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}$, ψ și η sînt respectiv, tensorul de tensiune Cauchy, vectorul flux de căldură, energia liberă specifică și entropia la momentul t .

Definiția 2.2. Numim proces termodinamic local în particula $\mathbf{x}$ a corpului B ansamblul funcțiilor $(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{T}, \mathbf{q}, \psi, \eta)$.

Pentru a caracteriza proprietățile fizice ale unui material va trebui să dăm unele legături între funcțiile unui proces termodinamic. În lucrarea prezentă aceste legături numite relații sau ecuații constitutive vor fi de forma [2], [3]

$$(2.5) \quad \varphi = \varphi(\mathbf{F}(\tau), \theta(\tau), \bar{\mathbf{g}}(\tau)).$$

Notînd prin $s = t - \tau$ și specializînd aceste relații la fluide simple (vezi de exemplu [4] §1.1) raportate la configurația prezentă ca referință, obținem

$$(2.6) \quad \varphi = \varphi_{s=0}^{\infty}(\Lambda'(s); \rho), \quad \Lambda'(\cdot) = (\mathbf{F}'(\cdot), \theta'(\cdot), \bar{\mathbf{g}}'(\cdot)),$$

în care $\mathbf{F}'(s) = \mathbf{F}(t-s)$ este gradientul de deformare relativ, iar ρ este densitatea fluidului la momentul t .

Definiția 2.3. Un proces termodinamic local se spune că este admisibil, dacă relațiile constitutive (2.6) sînt compatibile cu principiile conservării masei.

$$(2.7) \quad \rho + \rho \operatorname{tr} \mathbf{L} = 0,$$

impulsului și momentului cinetic

$$(2.8) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T,$$

și energiei

$$(2.9) \quad \rho \dot{\varepsilon} = \operatorname{tr}(\mathbf{T}\mathbf{L}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r, \quad (\varepsilon = \psi + \theta\eta),$$

în care $\mathbf{L} = \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}}$ este tensorul vitezelor de deformare, $\mathbf{b}$ — forța masică, ε — energia internă iar r — căldura suplimentară.

3. Presupuneri de regularitate și restricții termodinamice. După cum se știe o problemă de bază în termodinamică este aceea a găsirii restricțiilor impuse de inegalitatea C—D adică

$$(3.1) \quad \dot{\psi}(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{TL}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, \quad (3.1)$$

asupra funcționalelor constitutive. În acest scop vom adopta ipoteza ca valorile variabilelor constitutive la timpuri îndepărtate influențează mai puțin valorile funcționalelor constitutive la momentul prezent, cu alte cuvinte memoria materialului scade în timp. Matematic, această ipoteză a memoriei scăzute o vom materializa aici utilizând conceptul de obliviator sau funcție de influență ([5] § 5.3), adică o funcție continuă, monoton descrescătoare $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ pentru care $h(0) = 1$ și

$$(3.2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s^{1+\delta} h(s) = 0, \quad \delta > 0.$$

Astfel, dacă $h(\cdot)$ este un obliviator, atunci mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile²⁾ $\Lambda^t(\cdot)$ a căror normă³⁾

$$(3.3) \quad \|\Lambda^t(\cdot)\|_h = \left\{ \int_0^\infty \Lambda^t(s) \cdot \Lambda^t(s) h^2(s) ds \right\}^{1/2}$$

este finită, formează un spațiu Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \times \mathcal{H}_\theta \times \mathcal{H}_\rho$ în care produsul scalar este definit prin

$$(3.4) \quad \langle \Lambda_1^t(\cdot), \Lambda_2^t(\cdot) \rangle = \int_0^\infty \Lambda_1^t(s) \cdot \Lambda_2^t(s) h^2(s) ds.$$

În continuare presupunem că există un obliviator $h(\cdot)$ astfel ca pentru fiecare pereche (θ, ρ) funcționala

$$\psi_{s=0}(\Lambda^t(s); \rho) = \psi_{s=0}(\Lambda^t(s); \theta, \rho)$$

privită ca funcție de $\Lambda^t(\cdot)$ să fie continuă și diferențiabilă Fréchet într-o submulțime deschisă $\mathcal{D}$ a lui $\mathcal{H}$. Ca funcție de θ și ρ o presupunem de asemenea să fie continuu diferențiabilă.

Aceste ipoteze asigură existența unor operatori diferențiali $\delta_\Lambda = \delta_F + \delta_\theta + \delta_\rho$, ∂_θ și ∂_ρ (pentru definiția acestora se poate vedea de exemplu [6] II § 1.7.3) cu ajutorul cărora ψ se scrie sub forma

$$(3.5) \quad \psi = \delta_\Lambda \psi_{s=0}(\Lambda^t(s); \theta, \rho) + \partial_\theta \psi_{s=0}(\Lambda^t(s); \theta, \rho) \dot{\theta} + \partial_\rho \psi_{s=0}(\Lambda^t(s); \theta, \rho) \dot{\rho},$$

în care notația „/” este folosită să indice dependența liniară cu privire la argumentul ce îi urmează. Cum $\delta_\Lambda \psi$ este o funcțională liniară și continuă pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, rezultă că există un element unic

$$\Phi(\cdot) = \Phi(\Lambda^t(\cdot); \theta, \rho) = (\mathbf{P}(\cdot), \mathbf{x}(\cdot), \mathbf{k}(\cdot))$$

al acestuia, astfel încât

2) Prin $\Lambda^t(\cdot)$ vom înțelege ca de obicei istoria trecută a lui $\Lambda^t(\cdot)$.

3) Aici $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \text{tr}(\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^T) + \theta_1 \theta_2 + \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2$.

$$(3.6) \quad \delta_{\Lambda} \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) = \int_0^{\infty} \Phi(s) \cdot \rho \Lambda^t(s) h^2(s) ds. \quad (3.1)$$

Introducînd acum (3.6) în (3.5) și ținînd cont de (2.3), (2.7) și de faptul că ([4] relația (1.3.17))

$$\dot{\mathbf{F}}^t(s) = -\frac{d}{ds} \mathbf{F}^t(s) - \mathbf{F}^t(s) \mathbf{L}$$

obținem

$$\dot{\psi} = - \int_0^{\infty} \mathbf{P}(s) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{F}(s) h^2(s) ds - \int_0^{\infty} \chi(s) \frac{d}{ds} \theta^t(s) h^2(s) ds - \quad (3.2)$$

$$(3.7) \quad - \int_0^{\infty} \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{g}^t(s) h^2(s) ds - \int_0^{\infty} \mathbf{P}(s) \cdot \mathbf{F}^t(s) \mathbf{L} h^2(s) ds + \mathbf{g} \cdot \int_0^{\infty} \mathbf{k}(s) h^2(s) ds +$$

$$+ \partial_{\theta} \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) \dot{\theta} - \rho \partial_{\rho} \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) \text{tr } \mathbf{L}, \quad (3.3)$$

care introdusă în (3.1) conduce la

$$(3.8) \quad \sigma + \text{tr} \left\{ \left[\mathbf{T} + \rho^2 \partial_{\rho}^2 \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) \mathbf{1} + \rho \int_0^{\infty} \mathbf{P}(s)^T \mathbf{F}^t(s) h^2(s) ds \right] \mathbf{L} \right\} -$$

$$\left[\frac{1}{\theta} \mathbf{q} + \rho \int_0^{\infty} \mathbf{k}(s) h^2(s) ds \right] \cdot \mathbf{g} - \rho [\eta + \partial_{\theta} \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho)] \dot{\theta} \geq 0,$$

cu

$$\sigma = \rho \int_0^{\infty} \mathbf{P}(s) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{F}^t(s) h^2(s) ds + \rho \int_0^{\infty} \chi(s) \frac{d}{ds} \theta^t(s) h^2(s) ds +$$

$$+ \rho \int_0^{\infty} \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{g}^t(s) h^2(s) ds,$$

disiparea internă pe unitatea de masă.

Cum inegalitatea (3.8) trebuie să fie satisfăcută pentru orice proces termodinamic admisibil (am presupus ca de obicei, că forța masică și căldura suplimentară pot fi alese astfel încît (2.8) și (2.9) să fie satisfăcute), iar $\mathbf{L}$, $\dot{\theta}$ și $\mathbf{g}$ pot fi aleși să fie independenți de $\rho \Lambda^t(\cdot)$, θ și ρ (a se vedea lema lui Coleman ([7], § 4)) rezultă că următoarele condiții

$$(3.9) \quad \text{tr} \left\{ \left[\mathbf{T} + \rho^2 \partial_{\rho}^2 \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) \mathbf{1} + \rho \int_0^{\infty} \mathbf{P}(s)^T \mathbf{F}^t(s) h^2(s) ds \right] \mathbf{L} \right\} = 0,$$

$$\mathbf{q} + \rho \theta \int_0^{\infty} \mathbf{k}(s) h^2(s) ds = 0, \quad \eta + \partial_{\theta} \ddot{\psi}(\rho \Lambda^t(s); \theta, \rho) = 0, \quad \sigma \geq 0,$$

trebuie să satisfacă identic în $r, \Lambda^t(\cdot), \theta, \rho$ și L .

Descompunând acum L în $(3.9)_1$ ca sumă între partea simetrică D și antisimetrică W deducem că aceasta va fi satisfăcută dacă și numai dacă relațiile

$$(3.10) \quad \text{tr} \left\{ \left[T + \rho^2 \partial_\rho \bar{\psi}(r, \Lambda^t(s); \theta, \rho) 1 + \rho \int_0^\infty P(s)^T F^t(s) h^2(s) ds \right] D \right\} = 0,$$

$$\text{tr} \left[W \int_0^\infty P(s)^T F^t(s) h^2(s) ds \right] = 0,$$

sînt satisfăcute pentru orice tensori D și W arbitrari. Aceste ultime relații împreună cu $(3.9)_{3-4}$ conduc la

Teorema 3.1. *Condiția necesară și suficientă ca inegalitatea (3.1) să fie satisfăcută pentru orice proces termodinamic admisibil, într-un fluid simplu cu memorie caracterizat prin (2.2), este ca următoarele condiții*

$$(3.11) \quad T = -\rho^2 \partial_\rho \bar{\psi}(r, \Lambda^t(s); \theta, \rho) 1 - \rho \int_0^\infty P(s)^T F^t(s) h^2(s) ds, \quad P(\cdot)^T F^t(\cdot) = F^t(\cdot)^T P(\cdot),$$

$$q = -\rho \theta \int_0^\infty k(s) h^2(s) ds, \quad \eta = -\partial_\theta \bar{\psi}(r, \Lambda^t(s); \theta, \rho), \quad \sigma \geq 0,$$

să se păstreze pentru orice $\Lambda^t(\cdot)$ și ρ .

Observația 3.1. Din relațiile $(3.11)_{1,3}$ rezultă că energia liberă este un potențial nu numai pentru tensiune și entropie ci și pentru fluxul de căldură.

Observația 3.2. Dacă $F^t(s)$ și $\theta^t(s)$ sînt funcții constante în raport cu timpul t atunci inegalitatea de disipare internă $(3.11)_4$ se reduce la inegalitatea conducerii de căldură uzuală

$$q \cdot g \leq 0.$$

Observația 3.3. Dacă fluidul este incompresibil atunci ρ nu depinde de timp și deci tensiunea poate fi prezentată sub forma

$$(3.12) \quad T = -p1 + \int_0^\infty R(s) F^t(s) ds,$$

în care p este o presiune hidrostatică nedeterminată iar $R(s) = -\rho h^2(s) P(s)^T (P(\cdot) = P(r, \Lambda^t(\cdot); \theta, \rho))$. În plus din condiția de obiectivitate a tensorului T rezultă că relația

$$P(Q^t(\cdot)) F^t(\cdot) Q^T, \theta^t(\cdot), \bar{g}^t(\cdot); \rho = Q P(F^t(\cdot), \theta^t(\cdot), \bar{g}^t(\cdot); \rho) Q^t(\cdot)^T,$$

trebuie să fie satisfăcută identic în $Q^t(\cdot)$, unde $Q^t(t) = Q$ iar

$$\bar{g}^t(s) = \int_0^s Q^t(s) g^t(s) ds.$$

Observația 3.4. Dacă în dezvoltările de mai sus am fi pornit de la o consecință mai severă a principiului obiectivității

$$(3.13) \quad \varphi = \bar{\varphi}(\Gamma^t(s); \rho), \quad \Gamma^t(\cdot) = (\mathbf{C}^t(\cdot), \theta^t(\cdot), \bar{\mathbf{g}}^t(\cdot)),$$

în care $\mathbf{C}^t(\cdot) = \mathbf{F}^t(\cdot)^T \mathbf{F}^t(\cdot)$, $\bar{\mathbf{g}}^t(s) = \int_0^s \mathbf{R}^t(\sigma)^T \mathbf{g}^t(\sigma) d\sigma$ iar noile funcționale (deși pentru comoditate am păstrat aceleași notații, satisfac

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\Gamma^t(s); \rho) &= \mathbf{Q} \bar{\mathbf{T}}(\Gamma^t(s); \rho) \mathbf{Q}^T, \\ \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}\Gamma^t(s); \rho) &= \mathbf{Q} \bar{\mathbf{q}}(\Gamma^t(s); \rho), \\ (\bar{\psi}, \bar{\eta})(\mathbf{Q}\Gamma^t(s); \rho) &= (\bar{\psi}, \bar{\eta})(\Gamma^t(s); \rho), \end{aligned}$$

pentru orice tensor ortogonal $\mathbf{Q}$, am fi ajuns la niște rezultate identice (ca formă cu cele anterioare.

Primită la 7 iulie 1981

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanică

Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Gurtin M. E., Pipkin A. C., *A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds*. Arch. Rational Mech. Anal., 31, 113–126 (1968).
2. McCarthy M. F., *Constitutive Equations for Thermomechanical Materials with Memory*. Int. J. Engng. Sci., 8, 467–473 (1970).
3. Kosinski W., *Thermomechanical Coupling in Materials with Memory*. Arch. Mech. Stos., 25, 441–455 (1973).
4. Fetecău C., *Studiul ecuațiilor constitutive și al mișcării unor medii continue particulare*. Teză de doctorat, Univ. „Al. I. Cuza” Iași, 1979.
5. Day W. A., *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
6. Eringen A. C., *Continuum Physics*. Vol. II, *Continuum Mechanics of Simple-substance Bodies*. Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975.
7. Coleman B. D., *Thermodynamics of Materials with Memory*. Arch. Rational Mech. Anal., 17, 1–46 (1964).

ON THE THERMODYNAMICS OF SOME SIMPLE FLUIDS ASSOCIATED WITH FINITE WAVE SPEEDS

(Summary)

A thermodynamic theory of simple fluids whose constitutive functionals depend on the integrated history of the temperature gradient, the history of the deformation gradient and the history of the temperature is presented. For the stress tensor and the heat flux some integral forms are founded.

MECANICA

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad (1)$$

INSTABILITATEA VALURILOR¹⁾

FLORIN VITAN și RADU Z. TUDOSE

FLORIN VITAN și **RADU Z. TUDOSE**

1. Introducere. Curgerea în filme subțiri este un caz special al curgerii lichidelor, care se caracterizează prin prezența unei suprafețe libere cu o configurație geometrică particulară. Datorită avantajelor pe care le prezintă, (creșterea coeficienților de transfer de masă cu până la 250% [9], [17], [31] iar a coeficienților de transfer de căldură cu până la 100% [6], [39]), are aplicații importante și numeroase în tehnologiile moderne. Acest fapt a determinat aprofundarea studiilor teoretice și experimentale asupra acestui tip de curgere, ilustrată de numeroasele lucrări și monografii apărute până în prezent.

Hidrodinamica filmelor subțiri prezintă foarte multe aspecte referitoare la : filmele fără valuri, filmele cu valuri, influența fazei adiacente asupra curgerii, influența agenților tensioactivi, etc. Primele studii au fost efectuate în special asupra fluidelor newtoniene și treptat au fost extinse asupra celor nenewtoniene [4], [13], [16], [22], [33], [36], [40].

Sînt cunoscute mai multe tipuri de filme subțiri de lichide care se pot clasifica folosind drept criteriu forța motoare a curgerii [38]. Astfel, există filme gravitaționale, numite și filme descendente, filme create de o energie mecanică și filme create de forța de frecare dintre fazele adiacente. Totuși majoritatea studiilor teoretice și experimentale abordează aspectele legate de curgerea lichidelor în film gravitațional.

Experimental s-a constatat că filmul de lichid nu este neted pe întreaga suprafață de curgere, verticală sau înclinată, plană sau cilindrică. În realitate, curgerea lichidului în film neted are loc pe o porțiune limitată a suprafeței, după care curgerea devine mult mai complexă datorită apariției valurilor.

Apariția valurilor constituie un tip important al instabilității curgerii în film, valurile fiind considerate o instabilitate a orientării suprafeței libere a filmului. Tot o instabilitate a curgerii în film subțire o constituie, în cazul lichidelor care nu ud suprafața de curgere, pentru un debit mai mic decât o valoare critică, apariția unor porțiuni neacoperite de lichid [30]. În literatură se mai semnalează un al treilea tip de instabilitate care constă în apariția unor precen-nențe longitudinale pe suprafața filmului [3], [11].

Cel mai important tip de instabilitate hidrodinamică la curgerea în filme subțiri este apariția valurilor la suprafața liberă, deoarece este unanim admis că aceasta este și cauza principală a intensificării transferului de masă și de căldură. Acest tip de instabilitate a constituit obiectul celor mai multe studii teoretice și experimentale asupra hidrodinamicii filmelor subțiri. Până în prezent s-au elaborat numeroase teorii care încearcă să prezică apariția valurilor, viteza de propagare, lungimea de undă, amplitudinea valurilor etc. Metoda generală a tratării problemei stabilității la curgerea în film subțire constă, în principiu, în aplicarea asupra ecuațiilor curgerii a unei perturbații infinitezimale. În funcție de modul de alegere a funcției perturbatoare s-au dezvoltat două metode, de altfel similare, de abordare a problemei: teoria momentului integral și teoria clasică a stabilității. În teoria momentului integral se iau în considerare perturbații

¹⁾ Lucrare prezentată la al II-lea Congres Național de Chimie, București, 7-10 septembrie 1981.

infinitesimale ale vitezei de forma generală $f(y)e^{ix-ivt}$, care sînt suprapuse curgerii principale. Funcția $f(y)$ se alege astfel încît să fie verificate condițiile limită ale problemei. În această metodă componenta ecuației diferențiale a impulsului după direcția de curgere este liniarizată prin medierea termenilor ei pe grosimea filmului. După alegerea legii funcției $f(y)$ componenta liniarizată a ecuației diferențiale a impulsului se poate integra, soluția obținută fiind o funcție între o serie de parametri importanți ai curgerii și anume: numărul de undă α , frecvența v , criteriul Reynolds R_* , parametrul tensiunii superficiale ξ , și unghiul de înclinare al suprafeței θ . Funcția este explicitată în raport cu numărul de undă, care este o funcție complexă de ceilalți patru parametri

$$(1) \quad \alpha = F(v, R_*, \xi, \theta) = \alpha_r + i\alpha_i.$$

Dacă partea imaginară din relația (1), α_i , este negativă, perturbația inițială este amplificată pe direcția de curgere ceea ce determină apariția valurilor, iar dacă α_i este pozitivă perturbația este amortizată. Funcția $\alpha = F(R_*, \xi, \theta)$ pentru care $\alpha_i = 0$ definește o curbă de stabilitate neutră.

Teoria clasică a stabilității consideră perturbații ale funcției de curent de forma $\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$. După alegerea funcției $\varphi(y)$ și introducerea ei în ecuația liniarizată a impulsului se obține o ecuație diferențială liniară omogenă, de ordinul patru în $\varphi(y)$, cunoscută sub numele de ecuația Orr-Sommerfeld. Această ecuație împreună cu condițiile limită corespunzătoare conduce la o problemă de valori proprii, din care se obține o funcție complexă care dă dependența vitezei de propagare a valurilor, c , în funcție de ceilalți parametri de curgere, de forma generală

$$(2) \quad c = F(\alpha, R_*, \xi, \theta) = c_r + ic_i.$$

În acest caz dacă partea imaginară din relația (2), c_i , este pozitivă perturbația este amplificată în timp, dacă c_i este negativă perturbația inițială este amortizată iar dacă $c_i = 0$ se obține curba de stabilitate neutră.

O serie de autori au abordat problema stabilității suprafeței libere a filmului aplicînd teoria momentului integral [12], [18], [19], [23], [28], [29], [33], în timp ce alții au utilizat metoda clasică de analiză a stabilității [1], [2], [5], [13]—[15], [19]—[21], [24]—[27], [32], [40]—[44]. Cele două metode nu se deosebesc în esență prea mult între ele, încît diferențele dintre rezultatele obținute de diverși autori se datoresc modulului diferit de alegere a funcțiilor perturbatoare și a condițiilor limită.

Toate teoriile existente sînt valabile numai în zona de curgere cu valuri sinusoidale ordonate, care apar pe o porțiune limitată a suprafeței de curgere, iar concordanța dintre rezultatele teoretice și măsurătorile experimentale nu este satisfăcătoare nici pentru această zonă. Pentru în celelalte zone ale curgerii cu valuri, literatura de specialitate prezintă, în general, date experimentale; totuși în ultima vreme s-a prezentat o nouă metodă de analiză și anume metoda statistică [7], [8], [34], [35]. Trebuie accentuat că pînă în prezent nu s-a elaborat o teorie unitară a curgerii cu valuri care să descrie comportarea filmului pe toată suprafața de curgere, fapt explicabil prin complexitatea structurii reale a filmului.

Pe baza unor observații și măsurători experimentale asupra frecvenței valurilor și a grosimii minime și maxime a filmului s-a elaborat o nouă structură a filmului și s-au pus în evidență patru zone distincte pe suprafața unui film descendent [37]:

- a) *zona fără valuri*, denumită și zona de stabilizare a curgerii;
- b) *zona de apariție a valurilor*, caracterizată prin valuri transversale lungi, normale la direcția de curgere, relativ ordonate, geometria acestor valuri fiind instabilă;
- c) *zona de stabilizare a valurilor*, formată dintr-un ansamblu de valuri de tip săgeată, rezultate din spargerea valurilor ordonate din zona anterioară. Prin spargerea valurilor din zona a doua, lichidului se acumulează pe suprafață sub forma unor „pungi” proeminente a căror viteză crește și creează lateral, pe ambele părți, două valuri în formă de V (asemănătoare cu valurile generate de un vapor). Acestea au fost denumite valuri de tip săgeată. În această zonă au loc fenomene de coalescență și spargere a valurilor;
- d) *zona de curgere cu valuri stabilizate*, în care amplitudinea și viteza de propagare a valurilor de tip săgeată rămîne constantă.

Schematic această structură este prezentată în fig. 1. Existența mai multor zone cu valuri în care curgerea este diferită, a sugerat instabilitatea valurilor periodice sinusoidale, apariția celorlalte zone fiind o consecință a acestui tip de instabilitate.

În prezenta lucrare se demonstrează teoretic că valurile relativ ordonate care apar în zona a doua nu se pot propaga fără să-și modifice profilul inițial, adică curgerea cu valuri periodice sinusoidale nu este stabilă.

2. Aspecte teoretice. În scopul precizat mai sus se consideră, pentru zona a doua, modelul fizic prezentat în fig. 2, în care valurile periodice au profilul sinusoidal.

Dacă originea sistemului de coordonate cartezian este aleasă ca în fig. 2, ecuația suprafeței libere a filmului se poate exprima prin relația

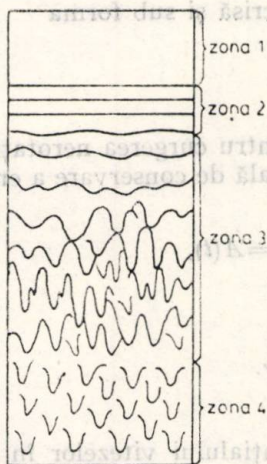


Fig. 1 - Reprezentarea schematică a zonelor la curgerea unui lichid în film subțire descendent.

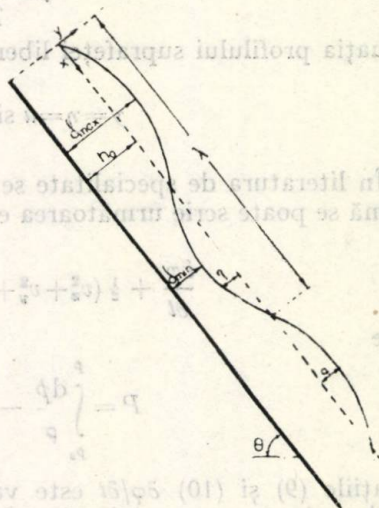


Fig. 2 - Modelul fizic al curgerii cu valuri periodice sinusoidale.

$$(3) \quad y = \eta \quad \text{în care}$$

$$(4) \quad \eta = a \sin (mx - nt).$$

Dacă parametrii a , m și n sînt constanți, atunci ecuația (4) definește profilul unui val progresiv simplu armonic. Ecuația (4) se poate scrie și sub forma

$$(5) \quad y = \eta = a \sin m \left(x - \frac{n}{m} t \right).$$

Profilul suprafeței libere a filmului la un timp oarecare t este același cu cel de la $t=0$, dacă originea sistemului de coordonate se deplasează, în direcția x , cu valoarea $(n/m)t$ și deci relația (5) reprezintă deplasarea unei curbe de ecuație $y = a \sin (mx)$, cu viteza $c = n/m$. Mărimea c este viteza de propagare a valului. Este evident că atunci cînd parametrul $a=0$ (amplitudinea) și $\eta=0$, curgerea este fără valuri. Lungimea de undă λ este dată de relația

$$(6) \quad \lambda = \frac{2\pi}{m}.$$

Profilul suprafeței libere la timpul t este identic cu cel de la timpul $t + 2\pi/n$, iar mărimea $T = 2\pi/n$ este perioada valului. Inversa perioadei $1/T = \nu = n/2\pi$, este frecvența valurilor. Parametrii m și n se pot exprima în funcție de aceste mărimi și anume: $m = 2\pi/\lambda$, $n = 2\pi/T = 2\pi\nu$ și deoarece $c = n/m$ se poate scrie o relație importantă între parametrii valurilor:

$$(7) \quad c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu,$$

iar ecuația profilului suprafeței libere poate fi scrisă și sub forma

$$(8) \quad y = \eta = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

În literatura de specialitate se arată că pentru curgerea nerotațională izotermă se poate scrie următoarea ecuație generală de conservare a energiei [10]:

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + gy + P = A(t),$$

în care

$$(10) \quad P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma.$$

În relațiile (9) și (10) $\partial \varphi / \partial t$ este variația potențialului vitezelor în timp, v_x , v_y și v_z sînt componentele vitezei lichidului, $A(t)$ este o funcție arbitrară, care pentru curgerea staționară este zero, R_1 și R_2 sînt razele principale de curbura ale suprafeței libere iar $1/R_1 + 1/R_2$ este curbura principală a suprafeței. Pentru curgerea bidimensională [10]

$$(11) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \eta / \partial x^2}{[1 + (\partial \eta / \partial x)^2]^{3/2}}.$$

Mărimea γ din ecuația (10) este tensiunea superficială cinematică, $\gamma = \sigma / \rho$, unde σ este tensiunea superficială dinamică iar ρ este densitatea lichidului. Pentru modelul fizic din fig. 2 deoarece panta profilului suprafeței libere $\partial \eta / \partial x$ este relativ mică, se poate considera $(\partial \eta / \partial x)^2 \simeq 0$ (ipoteză folosită de majoritatea autorilor) iar ecuația (11) devine

$$(12) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Prin urmare ecuația (10) pentru curgerea filmului cu valuri are forma

$$(13) \quad P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Pentru curgerea după o singură direcție, pentru valurile lungi (ipoteză folosită de mai mulți autori) pentru care κ/h_0 este suficient de mare, ecuația (9) ținând cont de (13) are forma

$$(14) \quad \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}(c-v)^2 + g\eta \cos \theta = \frac{P_0}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{2}c^2.$$

Ecuația (14) este cunoscută sub denumirea de ecuația presiunii la suprafața liberă a lichidului. Aici P este presiunea în interiorul lichidului, P_0 — presiunea exterioară, v — viteza medie în filmul cu valuri iar c — viteza de propagare a valurilor. O relație între c și v este dată de ecuația de continuitate care pentru acest caz se poate scrie sub forma

$$(15) \quad v(h_0 + \eta) = c\eta.$$

Printr-un artificiu de calcul, relația (15) se transcrie sub forma

$$(16) \quad ch_0 = (c+v)(\eta+h_0),$$

care are avantajul că permite exprimarea diferenței $(c-v)^2$ din (14) sub forma

$$(17) \quad (c-v)^2 = \frac{c^2 h_0^2}{(h_0 + \eta)^2},$$

iar ecuația (14) devine

$$(18) \quad \frac{P-P_0}{\rho} = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2 h_0^2}{(h_0 + \eta)^2} - g\eta \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Deoarece

$$(19) \quad \eta = a \sin(mx - nt), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -am^2 \sin(mx - nt) = -m^2 \eta.$$

Utilizând relația (19) ecuația (18) devine

$$(20) \quad \frac{P-P_0}{\rho} = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2 h_0^2}{(h_0 + \eta)^2} - \frac{\sigma}{\rho} m^2 \eta - g\eta \cos \theta.$$

Condiția ca mișcarea să fie staționară este ca la suprafața liberă a filmului să fie valabilă egalitatea $P = P_0$, (decă $P - P_0 = 0$, ceea ce implică condiția

$$(21) \quad \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2 h_0^2}{(h_0 + \eta)^2} - \frac{\sigma}{\rho} m^2 \eta - g\eta \cos \theta = 0.$$

Pentru interpretarea ecuației (21) s-a retranscris termenul al doilea al membrului stîng astfel

$$(22) \quad \frac{1}{2} \frac{c^2 h_0^2}{(h_0 + \eta)^2} = c^2 \left(1 + \frac{\eta}{h_0} \right)^{-2}$$

i ar factorul $(1 + \eta/h_0)^{-2}$ s-a aproximat cu primii trei termeni ai unei dezvoltări în serie de puteri inverse

$$(23) \quad \left(1 + \frac{\eta}{h_0}\right)^{-2} \simeq 1 - 2 \frac{\eta}{h_0} + 3 \left(\frac{\eta}{h_0}\right)^2.$$

În aceste condiții ecuația (21) devine

$$(24) \quad \left[\frac{c^2}{h_0} - \left(\frac{\sigma}{\rho} m^2 + g \cos \theta \right) \right] \eta - \frac{3}{2} \frac{c^2 \eta^2}{h_0^2} = 0.$$

Pentru ca relația (24) să fie adevărată trebuie ca primul termen să fie obligatoriu pozitiv, deoarece termenul al doilea este întotdeauna negativ, deci

$$(25) \quad \left[\frac{c^2}{h_0} - \left(\frac{\sigma}{\rho} m^2 + g \cos \theta \right) \right] \eta > 0.$$

Pentru simplificare se notează

$$(26) \quad \frac{\sigma}{\rho} m^2 + g \cos \theta = k > 0.$$

Deoarece pe o lungime de undă variabila η ia atât valori pozitive cât și negative, inecuația (25) trebuie rezolvată în două cazuri:

a) Dacă $\eta > 0$, atunci și

$$(27) \quad \frac{c^2}{h_0} - k > 0.$$

Deoarece valorile negative ale lui c nu au sens fizic, singura soluție acceptabilă a inecuației (27) este $c > \sqrt{k h_0}$.

b) Dacă $\eta < 0$, inegalitatea (25) este adevărată pentru

$$(28) \quad \frac{c^2}{h_0} - k < 0.$$

și deoarece $c < 0$ nu are sens fizic, soluția acceptabilă a inecuației (28) este $0 < c < \sqrt{k h_0}$.

Analizând soluțiile obținute în cele două cazuri rezultă următoarea concluzie deosebit de importantă: pentru valorile pozitive ale lui η , viteza valului c este mai mare ($c > \sqrt{k h_0}$) decât pentru valorile negative ale lui η ($c < \sqrt{k h_0}$). Cu alte cuvinte viteza de propagare a crestei valului este mai mare decât a bazei și profilul inițial se modifică. Instabilitatea geometriei valului explică configurația și structura filmului observată experimental [37].

Pentru a se obține informații asupra dependenței vitezei de propagare a valurilor în funcție de variabila η s-a rezolvat ecuația (24) în raport cu c . Pentru $\eta \neq 0$ singura soluție acceptabilă a acestei ecuații este

$$(29) \quad c = h_0 \sqrt{\frac{2k}{2h_0 - 3\eta}}.$$

Pentru ca soluția dată de relația (29) să fie reală trebuie îndeplinită condiția

$$(30) \quad \frac{k}{2h_0 - 2h} > 0.$$

Ținând cont că η este funcție de coordonata x , relația (29) se poate scrie și sub forma

$$(31) \quad c = h_0 \sqrt{\frac{2k}{2h_0 - 3a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)}}$$

sau introducând o coordonată adimensională $X = 2\pi x/\lambda$, relația (8) devine

$$(32) \quad \eta = a \sin X$$

iar relația (29) se scrie

$$(33) \quad c = h_0 \sqrt{\frac{2k}{2h_0 - 3a \sin X}}.$$

Condiția (30) trebuie rezolvată în două cazuri distincte :

a) $\eta > 0$, pentru $0 < x < \lambda/2$, sau, în coordonata adimensională, pentru $0 < X < \pi$. Valoarea maximă a lui η este egală cu a , pentru $x = \lambda/4$, respectiv $X = \pi/2$. În acest caz condiția (30) este echivalentă cu sistemul de inecuații

$$(34) \quad \begin{cases} \eta > 0, \\ 2h_0 - 3\eta > 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$(35) \quad 0 < \eta < \frac{2}{3} h_0.$$

Din condiția (35) rezultă o altă concluzie importantă: deoarece valoarea maximă a lui η pentru $\eta > 0$ este $\eta = a$, înseamnă că și

$$(36) \quad a < \frac{2}{3} h_0.$$

Prin urmare amplitudinea valurilor nu poate depăși valoarea limită $\frac{2}{3} h_0$. Folosind noțiunile de grosime minimă a filmului, $\delta_{\min}$ și grosime maximă a filmului $\delta_{\max}$, mărimi care se determină experimental, și ținând cont că pentru modelul din fig. 2 se poate scrie $\delta_{\min} = h_0 - a$, respectiv $\delta_{\max} = h_0 + a$, se obține $\delta_{\min} > h_0/3$, respectiv $\delta_{\max} < 5h_0/3$.

Această concluzie este verificată de datele experimentale prezentate în lucrările [16], [34], [37], atât pentru lichidele newtoniene (apă) cât și pentru lichidele nenewtoniene (soluții apoase de carboximetilceluloză de concentrații de la 1% până la 4%).

b) $\eta < 0$, pentru $\lambda/2 < x < \lambda$, sau, în coordonata adimensională, pentru $\pi < X < 2\pi$. Valoarea minimă a lui η este $\eta = -a$, pentru $x = 3\lambda/4$, respectiv $X = 3\pi/2$. Condiția (30) este echivalentă cu sistemul de inecuații

$$(37) \quad \begin{cases} \eta < 0, \\ 2h_0 - 3\eta < 0, \end{cases}$$

cu soluția $-a < \eta < 0$; deci condiția (30) este îndeplinită pentru orice valoare a lui η cuprinsă între $-a$ și zero.

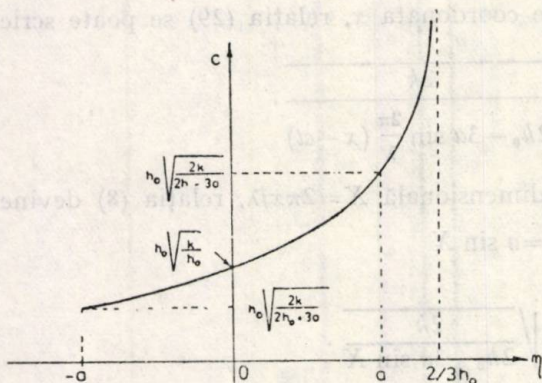


Fig. 3—Dependenta vitezei de propagare a valurilor în funcție de variabila η .

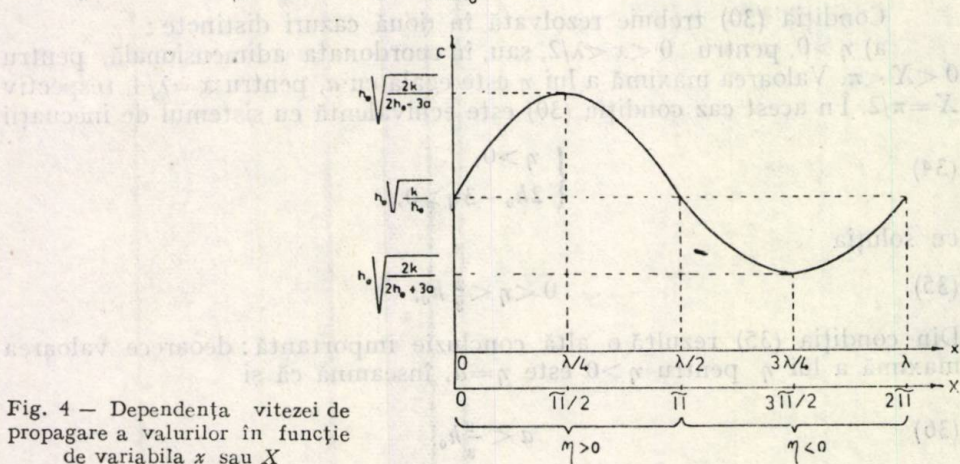


Fig. 4 — Dependenta vitezei de propagare a valurilor în funcție de variabila x sau X

Reprezentarea grafică a dependenței $c=f(\eta)$, dată de relația (29) este dată în fig. 3. Funcția (29) este strict crescătoare în raport cu variabila η pe întregul domeniu de definiție. Relațiile (31) și (33) permit reprezentarea grafică a variației vitezei de propagare a valurilor în funcție de coordonata dimensională x , respectiv în funcție de coordonata adimensională X . Această reprezentare este redată în fig. 4. Se observă că funcția (31), respectiv (33), prezintă un maxim în $x=\lambda/4$, respectiv $X=\pi/2$, după care scade pînă la o valoare minimă în $x=3\lambda/4$, respectiv $X=\pi/2$, dar viteza de propagare a valurilor este întotdeauna mai mare pentru $\eta > 0$ decît pentru $\eta < 0$.

Instabilitatea valurilor sinusoidale, demonstrată anterior, explică apariția unor valuri de tip săgeată (fig. 1). Conform ecuațiilor (31) sau (33) viteza de propagare a valurilor este dependentă și de amplitudine. Fluctuațiile amplitudinii pe lățimea planului de curgere, de forma generală $a=f(z)$, unde z este cea de-a treia coordonată a sistemului de referință cartezian, are drept consecință ruperea valurilor transversale ca urmare a viteze-

diferite de propagare pe lățimea planului. În partea din valul transversal care s-a deplasat cu viteză mai mare are loc o acumulare de lichid din părțile rămase mai în urmă, datorită componentei gravitaționale, avînd drept consecință creșterea atât a amplitudinii cît și a vitezei de propagare a acestei porțiuni. Astfel de fenomene au fost observate experimental și fotografiate [16]. Acest mecanism explică distrugerea valurilor sinusoidale din zona a doua și apariția unei zone de tranziție cu valuri de tip săgeată. În această zonă, instabilă și ea, are loc spargerea și coalescența valurilor de tip săgeată.

3. Concluzii. Pornind de la ecuația presiunii la suprafața liberă a filmului (14) s-a demonstrat că valurile ordonate sinusoidale care apar imediat după zona de curgere fără valuri nu-și pot păstra profilul inițial, ceea ce implică instabilitatea zonei a doua și determină apariția celei de-a treia zone, zona de stabilizare a valurilor. De asemenea s-a demonstrat matematic că grosimea minimă și maximă a filmului sînt limitate, concluzie confirmată de datele experimentale.

Primită la 4 mai 1982

(răsunat)

Institutul politehnic, Iași.
Catedra de inginerie chimică

BIBLIOGRAFIE

1. Anshus B. E., Ind. Eng. Chem. Fundam., 11, 502 (1972).
2. Anshus B. E., Goren L., AIChE J., 12, 1004 (1966).
3. Anshus B. E., Ruckenstein E., AIChE J., 1, 190 (1975).
4. Astarita G., Marrucci G., Palumbo G., Ind. Eng. Chem. Fundam., 4, 333 (1964).
5. Benjamin T. B., J. Fluid Mech., 2, 554 (1957).
6. Chand R., Rosson H. F., Ind. Eng. Chem. Fundam., 4, 356 (1965).
7. Chu K. J., Dukler A. E., AIChE J., 4, 695 (1974).
8. Chu K. J., Dukler A. E., AIChE J., 4, 583 (1975).
9. Emmert R. E., Pigford R. L., Chem. Eng. Prog., 50, 87 (1957).
10. Flügge S., Truesdell C., Fluid Dynamics, III, „Encyclopedia of Physics“, IX, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen-Heidelberg, 1960.
11. Gerstmann J., Griffith P., Intern. J. Heat Mass Transfer, 10, 576 (1967).
12. Gjevik B., Phys. Fluids, 8, 1918 (1970).
13. Gupta A. S., Rai L., Proc. Camb. Phil. Soc., 63, 527 (1967).
14. Hetsroni G., Prog. in Heat and Mass Transf., 6, 263 (1972).
15. Homsy G. M., Lectures in Applied Mathematics, 15, 191 (1974).
16. Ibănescu I., Teză de doctorat, Inst. polit. Iași, 1976.
17. Jepsen J. C., Crosser D. K., Perry R. H., AIChE J., 12, 186 (1966).
18. Капица П. Л., ЖЭТФ, 18, 3 (1948).
19. Krantz W. B., Goren L., Ind. Eng. Chem. Fundam., 10, 91 (1971).
20. Krantz W. B., Owens W. B., AIChE J., 6, 1163 (1973).
21. Krantz W. B., Owens W. B., Ind. Eng. Chem. Fundam., 1, 33 (1975).
22. Lin S. P., Pys. Fluids, 1, 69 (1967).
23. Lin S. P., Liu W. C., AIChE J., 3, 775 (1975).
24. Lin S. P., AIChE J., 1, 178 (1975).
25. Lin S. P., Phys. Fluids, 2, 263 (1971).
26. Lin S. P., AIChE J., 6, 1262 (1972).
27. Lin S. P., J. Fluid. Mech., 63, 417 (1974).
28. Ludviksson V., Lightfoot E. N., AIChE J., 3, 620 (1968).
29. Massot C., Irani F., Lightfoot E. N., AIChE J., 3, 445 (1966).
30. Norman W. S., McIntyre V., Trans. Inst. Chem. Engrs., 38, 301 (1966).
31. Oliver D. R., Atherinos T. E., Chem. Eng. Sci., 23, 525 (1968).
32. Smith F. I. P., Phys. Fluids, 7, 1693 (1967).

33. Sylvester N. D., Tyler J. S., Skelland A. P., Can. J. Chem. Eng., **51**, 418 (1973).
34. Takahama H., Kato S., Int. J. Multiphase Flow, **6**, 203 (1980).
35. Telles A. S., Dukler A. E., Ind. Eng. Chem. Fundam., **3**, 412 (1970).
36. Ting L. L., Rheol. Acta, **14**, 503 (1975).
37. Tudose R. Z., Năfornită C., Rev., Roum. Chim., **25**, 155 (1980).
38. Turquand M., Génie Chimique, **98**, 686 (1967).
39. Unterberg W., Edwards D. K., AIChE J., **11**, 1073 (1965).
40. Wei L., Phys. Fluids, **4**, 844 (1967).
41. Whitaker S., Ind. Chem. Eng. Fundam., **3**, 182 (1964).
42. Whitaker S., Jones L. O., AIChE J., **3**, 421 (1966).
43. Whitaker S., AIChE J., **6**, 1261 (1972).
44. Yih C. S., Phys. Fluids, **3**, 321 (1963).

LIQUIDS FLOW IN THIN FILMS

Waves Instability

(Summary)

In this paper, on the basis of an energy balance at the free surface of a falling liquid film, the instability of synusoidal profile of waves which occurs immediately after the stabilization region of the flow, is treated. The obtained theoretical results led to important conclusions on the actual structure and the minimal and maximal thickness of the liquid film.

CURGEREA LICHIDELOR ÎN FILME SUBȚIRI

LUNGIMEA DE STABILIZARE¹⁾

DE

CRISTIAN ZĂINESCU și RADU Z. TUDOSE

1. Introducere. Întilnită în mai multe tipuri de utilaje ale industriei chimice, curgerea filmelor subțiri de lichid formează subiectul unor ample studii analitice și experimentale. Apariția valurilor s-a dovedit un fenomen care intensifică procesele de transfer de căldură și de masă la ambele interfețe, creind o amestecare suplimentară și măbind suprafața de contact între faze. Etalarea unui film subțire de lichid a arătat că formarea valurilor nu este imediată. Lichidul străbate mai întâi o anumită distanță de la distribuitor în care filmul are un aspect neted, nedisturbat. Pentru planuri verticale aspectul intră în contradicție cu rezultatele teoriei clasice a stabilității liniare care prezic o curgere necondiționat instabilă, deci începind cu $Re = 0$ [2] [13].

Lungimea de stabilizare a filmului cu valuri, întilnită și sub denumirea de lungime de intrare, apare așadar ca o mărime de imediat interes practic. Determinarea ei experimentală este relativ facilă în schimb aspectele teoretice au fost mai puțin abordate.

În literatură sînt disponibile mai multe relații, unele chiar empirice, menite a prezice stabilitatea acestui tip de curgere. Grupind anumite mărimi susceptibile a influența mișcarea, relațiile amintit prezic, pentru o situație dată, prezența sau absența valurilor superficiale. Evidența experimentală arată însă că, dacă lungimea de curgere este suficient de mare, este iminentă existența concomitentă a două regiuni, una fără valuri și alta cu valuri. Dezacordul în exprimarea unor grupuri adimensionale de stabilitate se conjugă cu dezacordul în determinarea practică a valorilor critice ale acestor g upuri.

Expresiile obținute suferă și prin aceea că nu implică o variabilă foarte importantă: coordonata pe direcția de curgere. Cu această omisiune este de așteptat ca nici lungimea de stabilizare să nu poată fi definită analitic.

O încercare de a exprima distanța de început al valurilor în termeni ai teoriei clasice a stabilității liniare a fost făcută de A t h e r t o n și H o m s y [1]. Compararea cu experimentul, deși acuză lipsa de date suficiente, s-a dovedit neconcludentă. S-a ajuns la părerea că apariția valurilor este manifestarea unui fenomen neliniar a cărui descriere trebuie așteptată de la un tratament hidrodinamic neliniar.

Date privind măsurători ale lungimii de stabilizare se întilnesc în mai multe lucrări, [3], [6], [8], [10] și [9], [11], ultimile două incluzind și cazul newtonian. Făcînd abstracție de condițiile de intrare, datele arată că, în esență, lungimea de stabilizare depinde de natura fluidului și de debit. Ea crește cu numărul Reynolds și, pentru un Re dat, cu viscozitatea lichidului. Spre numere Reynolds mari lungimea de stabilizare tinde către o valoare constantă, aspect explicat prin faptul că atunci forțele de inerție devin predominante în raport cu proprietățile de forfecare ale fluidului [7].

S-a propus, de asemenea, utilizarea datelor privind lungimea de stabilizare drept o măsură a unor proprietăți reologice ale suprafețelor contaminate [4].

¹⁾ Prezentată la al II-lea Congres național de chimie, București, 7-10 septembrie 1981.

Primul studiu teoretic consacrat curgerii cu valuri aparține lui K a p i ț a [5]. El a obținut o ecuație diferențială care descrie forma suprafeței libere a filmului, prezicând valuri capilarno-gravitaționale sinusoidale, neamortizate. Dintr-un bilanț energetic K a p i ț a a obținut, de asemenea o condiție de existență sau inexistență a acestor valuri, după cum

$$\frac{\rho g \tau \delta_0^2}{3\eta u_0} < 1.$$

Dar, pentru o distribuție semiparabolică a vitezelor, grupul adimensional de mai sus ia întotdeauna o valoare limită unitară.

În cele ce urmează se vor utiliza rezultatele lui K a p i ț a în încercarea de a deduce o relație criterială pentru prezicerea lungimii de stabilizare.

2. Teorie. Se consideră curgerea laminară a unui film subțire de lichid, newtonian, incompresibil, de-a lungul unui plan înclinat. Schema curgerii este prezentată în fig. 1.

Pentru mișcarea cu valuri grosimea instantanee a filmului poate fi scrisă

$$(1) \quad \delta = \delta_0(1 + \varphi).$$

Soluția pentru funcția suprafeței libere φ se poate determina din relația [5]

$$(2) \quad \frac{d^3\varphi}{dx^3} + \frac{\rho}{\delta\sigma} (c - u_0) \left(c - \frac{9}{10} u_0 \right) \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

care este o ecuație diferențială de ordinul trei, liniară, omogenă, cu coeficienți constanți.

Viteza medie a filmului u_0 , rezultată din analiza Nusselt, este

$$(3) \quad u_0 = \frac{1}{3} \frac{\rho g \tau \delta^2}{\eta}$$

iar viteza de propagare a valurilor c , pentru cazul perturbațiilor de mică amplitudine [2],

$$(4) \quad c = 3u_0.$$

Ecuația diferențială (2) devine

$$(5) \quad \frac{d^3\varphi}{dx^3} + \frac{7}{15} \frac{\rho^3 g \tau^2 \delta^3}{\eta^2 \sigma} \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Pentru o generalizare a analizei se consideră că în curgerea cu valuri viteza medie u_0 poate suferi o modificare arbitrară în modul. Deci, păstrându-se alura semiparabolică pentru distribuția vitezelor,

$$(6) \quad u_0 = C_1 \frac{\rho g \tau \delta^2}{\eta}$$

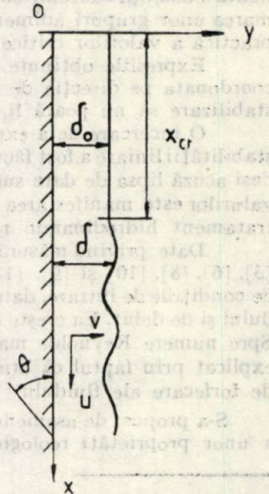


Fig. 1 — Schema curgerii

La fel se poate considera și

$$(7) \quad c = C_2 u_0,$$

care stipulează faptul că viteza de undă c poate lua, de asemenea, o valoare arbitrară. Se exclude însă domeniul ipotetic $C_2 = \left(\frac{9}{10} \dots 1\right)$ pentru a nu schimba semnul pozitiv al termenului care conține φ' .

Notînd cu

$$(8) \quad N^2 = \frac{\rho^2 g_x^2 \delta^3}{\eta^2 \sigma}$$

ecuația (5) primește forma

$$(9) \quad \varphi''' + C^2 N^2 \varphi' = 0,$$

unde C^2 este o constantă, întotdeauna pozitivă, care include pe C_1 și C_2 .

Ecuația caracteristică are o rădăcină nulă și două rădăcini complexe. Soluția ecuației (9), eliminînd $\varphi = \text{const.}$, are forma

$$(10) \quad \varphi = K_1 \sin CNx + K_2 \cos CNx,$$

care este o oscilație armonică simplă. Ea poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$(11) \quad \varphi = A \sin (CNx + B),$$

unde

$$A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \quad \sin B = \frac{K_2}{A}.$$

Cele două constante de integrare K_1 și K_2 sau, respectiv A și B , trebuie deduse din două condiții la limită. Se dispune numai de condiția

$$(12) \quad \varphi = 0 \quad \text{la} \quad x = x_{\text{or}}.$$

Din (11) rezultă

$$(13) \quad x_{\text{or}} = \frac{n\pi - B}{CN} = KN^{-1},$$

unde K reprezintă o nouă constantă numerică, necunoscută, care include B , C și constanta întreagă n . Presupunem, evident, pentru K o valoare singulară, așa că din (8) se poate scrie că, dimensional,

$$(14) \quad x_{\text{or}} = K \frac{\eta \sigma^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} g_x \delta^{\frac{3}{2}}}$$

sau, dacă se pune în evidență debitul volumic de curgere pe unitatea de lățime a planului, adică $q = u_0 \delta$,

$$(15) \quad x_{\text{or}} = K \frac{\eta^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}}{\rho g_x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}.$$

Înmănunchind mărimile în grupuri adimensionale, s-a preferat exprimarea numărului Reynolds

$$(16) \quad Re = \frac{q\rho}{\eta}$$

și a numărului lungimii de stabilizare

$$(17) \quad \Pi_x = \frac{\rho g_x x_{or}}{\sigma/x_{or}},$$

care apare drept un raport între presiunea hidrostatică și presiunea dată de tensiunea superficială.

Analiza dimensională expusă sugerează că se pot căuta relații de forma generală

$$(18) \quad \Pi_x = k Re^m.$$

Constantele k și m nu pot fi deduse analitic, în schimb pot fi determinate pe cale experimentală. Următoarea parte a lucrării este consacrată acestui scop.

3. Experiment. Curgerea a avut loc pe un plan vertical din polimetacrilat de metil lat de 30 cm și lung de 2 m. Instalația experimentală utilizată este descrisă în altă lucrare [12]. Fluidul de lucru a fost apa la temperatura de 13 °C. Lungimea de stabilizare s-a determinat vizual, cu ajutorul unei scale gradate atașată planului de curgere.

După deversare lichidul a etalat o primă zonă în care sînt vizibile efectele de intrare. A urmat apoi o zonă mai întinsă, tot fără valuri, în care grosimea filmului s-a păstrat aproximativ constantă. La o anumită distanță de la distribuitor au apărut valurile. Apariția nu a avut loc în mod brusc. A existat o scurtă zonă cu mici spoturi generatoare de valuri, zonă în care porțiuni de curgere netedă au alternat cu porțiuni de curgere ondulatorie. Drept lungime de stabilizare s-a considerat distanța de la pragul de deversare pînă la mijlocul acestei ultime zone de tranziție.

În testarea relației (18) s-a făcut apel și la datele disponibile în lucrarea lui Sylvester, Tyler și Skelland [9]. Ei au măsurat fotografic lungimea de stabilizare în cazul curgerii unor soluții apoase de

Tabelul 1
Proprietățile lichidelor experimentale

	Concentrația soluției	ρ [kg/m ³]	$\sigma \cdot 10^3$ [N/m]	$\eta \cdot 10^3$ [N · s/m ²]	k
1	0,95	1 244,5	63,7	238,5	40
2	0,92	1 242,4	64,1	148,2	90
3	0,85	1 221,9	64,5	71,9	7,5
4	0,60	1 151,9	64,9	8,24	0,3
5	0 (apă)	1 000	73,8	1,2	40

glicerină de diverse concentrații. Curgerea a avut loc pe un plan vertical de sticlă lat de 46 cm.

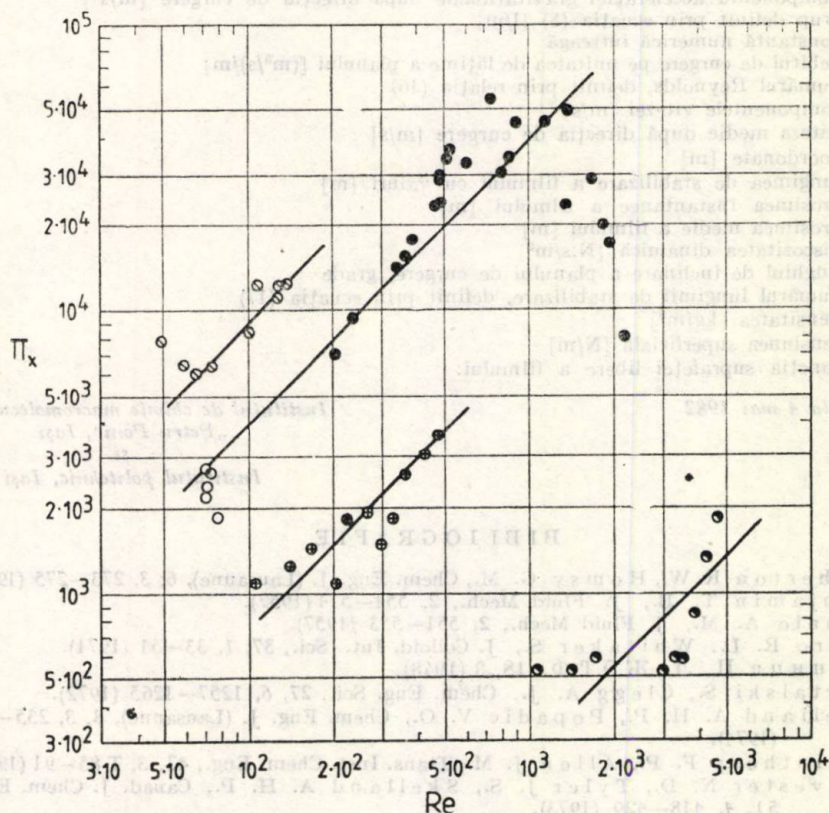


Fig. 2. — Date experimentale: soluții apoase de glicerină ○—95%; ◐—95%; ⊕—85%; ●—60% (datele lui Sylvester și colaboratori [9]); ●—apă (date proprii).

Toate datele sînt ilustrate în fig. 2, unde s-a reprezentat logaritmically dependența criteriului Π_x de numărul Reynolds. Se observă în toate cazurile că sînt acceptabile variații liniare cu panta unitară ($m \approx 1$). La debite de curgere mari rezultatele noastre nu sînt suficient de concludente. În aceste situații și aprecierea lungimii de stabilizare s-a făcut cu mai mare dificultate. Valorile obținute pentru coeficientul k , împreună cu proprietățile soluțiilor utilizate, sînt prezentate în tabelul 1.

4. Concluzii. Lucrarea de față a încercat să stabilească pe cale semi-empirică o relație pentru definirea lungimii de stabilizare a filmelor subțiri de lichid, pornind de la ipotezele analitice deja consacrate pentru acest tip de curgere. Această primă comparație cu experimentul oferă rezultate mulțumitoare. Importanța deosebită a domeniului necesită în continuare studii mai amănunțite.

Notații

- $A, B, C, C_1, C_2, K, K_1, K_2, k, m$ — constante numerice
 c — viteza de propagare a valurilor [m/s]
 g_x — componenta accelerației gravitaționale după direcția de curgere [m/s²]
 N — grup definit prin ecuația (8) [l/m]
 n — constantă numerică întreagă
 q — debitul de curgere pe unitatea de lățime a planului [(m³/s)/m]
 Re — numărul Reynolds, definit prin relația (16)
 u, v — componentele vitezei [m/s]
 u_0 — viteza medie după direcția de curgere [m/s]
 x, y — coordonate [m]
 x_{cr} — lungimea de stabilizare a filmului cu valuri [m]
 δ — grosimea instantanee a filmului [m]
 δ_0 — grosimea medie a filmului [m]
 η — viscozitatea dinamică [N.s/m²]
 θ — unghiul de inclinare a planului de curgere, grade
 Π_x — numărul lungimii de stabilizare, definit prin ecuația (17)
 ρ — densitatea [kg/m³]
 τ — tensiunea superficială [N/m]
 φ — funcția suprafeței libere a filmului.

Primită la 4 mai 1982

Institutul de chimie macromoleculară
 „Petru Poni”, Iași
 și
 Institutul politehnic, Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Atherton R. W., Homsy G. M., Chem. Eng. J. (Lausanne), 6, 3, 273—275 (1973).
2. Benjamin T. B., J. Fluid Mech., 2, 554—574 (1957).
3. Binnie A. M., J. Fluid Mech., 2, 551—553 (1957).
4. Cerro R. L., Whitaker S., J. Colloid Int. Sci., 37, 1, 33—51 (1971).
5. Кауцца П. Л., Ж.Э.Т.Ф., 18, 3 (1948).
6. Portalski S., Clegg A. J., Chem. Eng. Sci., 27, 6, 1257—1265 (1972).
7. Skelland A. H. P., Popadic V. O., Chem. Eng. J. (Lausanne), 8, 3, 235—242 (1974).
8. Stainthorpe F. P., Allen J. M., Trans. Inst. Chem. Eng., 43, 3, T 85—91 (1965).
9. Sylvester N. D., Tyler J. S., Skelland A. H. P., Canad. J. Chem. Eng., 51, 4, 418—429 (1973).
10. Tailby S. R., Portalski S., Chem. Eng. Sci., 17, 4, 283—290 (1962).
11. Tudose R. Z., Ibănescu I., Rev. chim., 25, 6, 512—517 (1974).
12. Tudose R. Z., Zăinescu C., Sviecinski M., Mem. Sect. Șt., Acad. R.S.R., 3, 1, 215—218 (1980).
13. Yih C. S., Phys. Fluids, 6, 3, 321—275 (1963).

LIQUID FLOW IN THIN FILMS

The Stabilization Length

(Summary)

The stabilization length for thin liquid films has been studied theoretically and experimentally. The experimental data obtained found to be in satisfactory agreement with predicted results.

THE RESONANT CONDITIONS FOR NONLINEAR INTERACTION BETWEEN RELATIVISTIC MAGNETOHYDRODYNAMIC WAVES

BY

D. I. ZOLER and C. D. CIUBOTARIU

1. The Three-Waves Interaction System of Equations. The main equations of relativistic magnetohydrodynamics with respect to a Lorentz system of reference are (see e.g. [1])

$$(1.1) \quad T_{\alpha\beta, \beta} = 0 \quad (\text{equations of motion})$$

$$(1.2) \quad H_{\alpha\beta, \gamma} + H_{\beta\gamma, \alpha} + H_{\gamma\alpha, \beta} = 0 \quad (\text{Maxwell equations})$$

$$(1.3) \quad N_{\alpha, \alpha} = 0 \quad (\text{equation of continuity})$$

$$(1.4) \quad \theta = \frac{P}{(\kappa - 1)N} \quad (\text{equation of state})$$

where $T_{\alpha\beta}$ is the total energy-momentum tensor of the plasma and electromagnetic field $H_{\alpha\beta}$, N is the density of the number of particles, P is the pressure of the plasma, θ is the internal energy of a particle, κ is the ratio of specific heats, u_{α} is the plasma four velocity and $N_{\alpha} = Nu_{\alpha}$.

If we denote with B_0 , N_0 , and P_0 , the homogeneous magnetic field, the density of the number of particles and, respectively the pressure for the equilibrium state, then the physical quantities which describe the wave-wave interaction can be chosen in the form

$$B = B_0 + \delta b \cos k_0 x + b, \quad N = N_0 + n, \quad V = V_0 + \delta v \cos k_0 x + V, \quad P = P_0 + p,$$

where b , n , v and p are the perturbations of the magnetic field, the density, the velocity and the pressure.

In the system of reference comoving to the Alfvén wave, the equations corresponding to the interaction of three waves can be written

$$(1.5) \quad \hat{L}\varphi = 0,$$

where $\hat{L}$ is a linear differential operator. The Alfvén wave is considered as a stationary background in which can appear other two waves: a magnetohydrodynamic wave and a magnetoacoustic wave.

To do the problem easily of access we assume that the waves propagate along the x -axis, the unperturbed magnetic field has only a component ($B_0 = B_0$) and the perturbed quantities are

$$(1.6) \quad v_1, \quad v_2=0, \quad v_3, \quad b_1=b_2=0, \quad b_3=b, \quad n, \quad p.$$

These conditions do not restrict the generality of the problem. From Eqs. (1.5) we obtain

$$(1.7) \quad (A_3 v_1 + A_4 n + A_5 p)_{,x} + (G_1 v_1 - G_2 n - G_3 p)_{,t} = -(A_1 v_3 + A_2 b)_{,x} \cos k_0 x + \\ + k_0 (A_1 v_3 + A_2 b) \sin k_0 x + \left(G_4 v_3 - \frac{u}{c^2} A_2 b \right)_{,t} \cos k_0 x,$$

$$(1.8) \quad F_1 v_{3,x} - \frac{1}{\mu} B_0 b_{,x} + \left(L_1 v_3 - \frac{u}{c^2 \mu} B_0 b \right)_{,t} = (F_3 n_{,x} + F_4 p_{,x} - F_2 v_{1,x}) \cos k_0 x - \\ - k_0 (F_3 n + F_4 p - F_2 v_1) \sin k_0 x + \left(L_2 v_1 - \frac{1}{\mu} F_3 n - \frac{1}{u} F_4 p \right)_{,t} \cos k_0 x,$$

$$(1.9) \quad (G_1 v_1 - G_2 n - G_3 p)_{,x} - \frac{1}{c^2} (M_1 p - m_0 c^2 \gamma^2 n - A_3 v_1)_{,t} = \\ = \left(G_4 v_3 - \frac{u}{c^2} A_2 b \right)_{,x} \cos k_0 x - k_0 \left(G_4 v_3 - \frac{u}{c^2} A_2 b \right) \sin k_0 x - \\ - \frac{1}{c^2} (A_2 b - M_2 v_3)_{,t} \cos k_0 x,$$

$$(1.10) \quad (N_0 \gamma^2 v_1 - u n)_{,x} + (n - \frac{1}{2} A N_0 v_1)_{,t} = \frac{1}{2} A N_0 \delta v (v_{3,x} \cos k_0 x - \\ - k_0 v_3 \sin k_0 x) - N_0 \delta v \frac{u^2}{c^2} v_{3,t} \cos k_0 x,$$

$$(1.11) \quad b_{,t} + (u b - B_0 v_3)_{,x} = -(\delta b + A B_0 \delta v) v_{1,x} \cos k_0 x + \\ + k_0 (\delta b + A B_0 \delta v) v_1 \sin k_0 x.$$

In these equations, δb and δv are the perturbed quantities of the background Alfvén wave which satisfy the relations

$$(1.12) \quad u \delta b - B_0 \delta v = 0, \quad \delta b = \alpha B_0, \quad \delta v = \alpha u,$$

where u is the velocity of the Alfvén wave with respect to the laboratory system of reference and α is a small parameter. The coefficients A , F , G , and L have the expressions

$$A_1 = \frac{1}{2} \alpha \theta_0 A^2 u = \alpha A_1^0, \quad A_2 = \frac{\alpha}{\mu} B_0 = \alpha A_2^0, \quad A_3 = -\theta_0 A \gamma^2, \\ A_4 = \frac{1}{2} \theta_0 A m_0 u^2 \gamma^2, \quad A_5 = \gamma^2 \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{x-1} \right), \quad A = \frac{2u}{c^2} \gamma^2, \\ F_1 = \frac{1}{u \mu} B_0^2, \quad F_2 = \theta_0 \alpha \beta \frac{\gamma^4}{c^2} = \alpha F_2^0, \quad F_3 = m_0 \alpha \gamma^2 u^2 = \alpha F_3^0, \\ F_4 = \frac{x}{x-1} \frac{\gamma^2}{c^2} \alpha u^2 = \alpha F_4^0, \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = 1 + \frac{u^2}{c^2},$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \theta_0 \beta \frac{\gamma^4}{c^2}, \quad G_2 = m_0 \gamma^2 u, \quad G_3 = \frac{x}{x-1} \frac{\gamma^2}{c^2} u, \\ G_4 &= 2\theta_0 \frac{\gamma^4}{c^4} \alpha u^2 + \frac{1}{\mu c^2} \alpha B_0^2 = \alpha G_4^0, \quad L_1 = \theta_0 \frac{\gamma^2}{c^2} + \frac{1}{\mu c^2} B_0^2, \\ L_2 &= 2\theta_0 \frac{u^2}{c^2} \gamma^4 \alpha + \frac{1}{\mu c^2} \alpha A B_0^2 u + \frac{1}{\mu c^2} B_0^2 \alpha = \alpha L_2^0, \\ M_1 &= 1 - \frac{x}{x-1} \gamma^2, \quad M_2 = -\theta_0 \gamma^2 \alpha A = \alpha M_2^0. \end{aligned}$$

2. First-Order Time-Dependent Perturbation Theory. The Eqs. (1.7) - (1.11) can shortly be written as

$$(2.1) \quad (\hat{\mathcal{H}}^0 + \hat{\mathcal{H}}^1) \varphi = 0,$$

where φ is the wave function (a column vector). $\hat{\mathcal{H}}^0$ is the unperturbed operator ($\delta v=0$, $\delta b=0$) and $\hat{\mathcal{H}}^1$ is a small correction to $\hat{\mathcal{H}}^0$. The operator $\hat{\mathcal{H}}^0$ can be written

$$(2.2) \quad \hat{\mathcal{H}}^0 = \hat{V}_i^0 - \hat{H}^0,$$

where

$$(2.3) \quad \hat{V}_i^0 = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_2 & -G_3 & 0 \\ 0 & -L_1 & 0 & 0 & -\frac{u}{\mu c^2} B_0 \\ \frac{1}{c^2} A_3 & 0 & m_0 \gamma^2 & -\frac{1}{c^2} M_1 & 0 \\ -\frac{1}{2} A N_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$(2.4) \quad \hat{H}^0 = \begin{bmatrix} -A_3 & 0 & -A_4 & -A_5 & 0 \\ 0 & -F_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} B_0 \\ -G_1 & 0 & G_2 & G_3 & 0 \\ -N_0 \gamma^2 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 & -u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}.$$

We obtain thus for the Eq. (2.1) the other form

$$(2.5) \quad \hat{V}_i^0 = (\hat{H}^0 + \hat{H}^1) \varphi,$$

where $\hat{H}^1 = -\hat{\mathcal{H}}^1$.

The problem of the stability of the system (2.5) is solved in the next section.

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \delta \mathbf{A} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \delta \mathbf{B} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \delta \mathbf{A} \delta \mathbf{B} + \dots$$

where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are algebraic expressions. If we integrate Eqs. (2.12) with respect to t from $-\infty$ to $+\infty$, we have

$$(2.13) \quad \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \delta \mathbf{A} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \delta \mathbf{B} + \dots$$

Let us assume that the perturbation $\delta \mathbf{A}$ is proportional to $\exp(i\omega t)$ and $\delta \mathbf{B}$ is proportional to $\exp(i\omega t)$. Then we have

$$(2.14) \quad \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \delta \mathbf{A} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \delta \mathbf{B} + \dots$$

where $\delta \mathbf{A}$ is the delta function. From these equations we find the following resonant conditions

$$(2.15) \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 = \omega_2 \pm \omega_3$$

and

$$(2.16) \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 = \omega_2 \pm \omega_3$$

3. Concluding Remarks. We see that the relations (2.1) appear in a natural way taking into account that we have used the comoving system of reference in which Alfvén wave is a stationary background (see [3] and [4]).

We observe that the resonant conditions for the interaction of the relativistic waves have a similar form as in the classical case [5]. The shift $\delta \omega$ of frequency induced by the three interacting relativistic waves is proportional to the matrix element of the perturbed operator $\hat{H}_1$ and $\delta \omega$ is a small term (2.6).

The time-dependent perturbation method used by us is analogous to the Drazin formalism. Moreover, this method permits the derivation of the dispersion relation for the relativistic coupled waves and the study of the stability of a background magnetohydrodynamic wave.

REFERENCES

1. Lichnerowicz A., *Relativistic Hydrodynamics and Astrophysics*, W. A. Benjamin, New York, 1967, p. 97.
2. Rapp D., *Quantum Mechanics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971, p. 403.
3. Tatarski A. A., *Operator B. H. JAH GGP*, 14, 7 (1982).
4. Oparnikov B. H., *Operator B. H. JAH GGP*, 14, 7 (1982).
5. Weiland J., *Williamstown H. GGP*, 14, 7 (1982).

Received July 10, 1981

Department of Physics, Polytechnic Institute, Paris

(2.17) $\omega_1 = \omega_2 \pm \omega_3$

where $\delta \mathbf{A}$ is the delta function. From these equations we find the following resonant conditions

$$(2.18) \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 = \omega_2 \pm \omega_3$$

and

$$(2.19) \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 = \omega_2 \pm \omega_3$$

Here we have neglected the terms of the order $\delta \omega$. Further, we multiply

Eq. (2.12) by $\exp(-i\omega t)$ and integrate from $-\infty$ to $+\infty$. Then we have

$$(2.20) \quad \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \delta \mathbf{A} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \delta \mathbf{B} + \dots$$

EFFET DES IONS DE Nb ET DE Li ET DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR LES PARAMÈTRES PIÉZOÉLECTRIQUES DES MATÉRIAUX DE TYPE PZT

PAR

IRINA JEMNA, POMPILIU NICOLAU, HALINA NICULESCU, C. TÂNĂSOIU,
EMILIA VÂRZARU et EMIL LUCA

1. Introduction. L'étude des matériaux piézo-céramiques vise l'augmentation de l'activité piézoélectrique, par l'accroissement du facteur de couplage piézoélectrique k_p , l'augmentation du facteur de qualité mécanique Q_m ainsi que l'amélioration de la stabilité des paramètres piézoélectriques en fonction du temps et des variations de la température.

On réalise cette amélioration en remplaçant, en certaines proportions, les ions de Ti^{4+} ou de Zr^{4+} par des ions de valences différentes (plus grandes ou moindres) en fonction du but poursuivi.

Ainsi, en remplaçant les ions de Ti^{4+} ou de Zr^{4+} des sites octaédriques (de type B), par des ions de valences supérieures, comme Nb^{5+} , Ta^{5+} , W^{6+} etc, on obtient des matériaux à activités piézoélectriques améliorées, à plus grande résistivité électrique de volume, à facteur de qualité mécanique réduit et à pertes diélectriques plus grandes. Si la substitution se fait avec des ions de valence inférieure à la valence du Ti^{4+} ou du Zr^{4+} , par exemple Sc^{3+} , Mg^{2+} , Fe^{3+} , K^{+} ou du Li^{+} , on obtient des matériaux à pertes diélectriques réduites, à facteur de qualité mécanique important, à résistivité électrique plus réduite [1].

Les matériaux à facteur de qualité mécanique réduit ($Q_m \sim 100$) présentent des activités piézoélectriques importantes ($k_p > 0,5$) étant idéals pour les résonateurs de bande large et de puissance réduite.

Les additions courantes, qui amoindrissent le facteur de qualité mécanique et augmentent l'activité piézoélectrique, diminuent la température Curie à des valeurs au-dessous de $300^\circ C$ [2], diminuant simultanément la stabilité des paramètres électriques et piézoélectriques aux variations de température.

Dans l'ouvrage présent, on a essayé d'obtenir certains matériaux à grandes activités piézoélectriques, sans pourtant détériorer les autres paramètres (constante diélectrique, tangente de l'angle de pertes, température Curie). On a tâché aussi de simplifier la technologie de préparation, en vue d'une industrialisation potentielle.

2. Préparation et méthodes de mesure. Les matériaux y soumis à l'étude sont des zirco-titanates de plomb, de type $\text{Pb}(\text{Zr}_y\text{Ti}_{1-y})\text{O}_3$, à compositions situées au voisinage de la transformation morphotrope de phase ($y \approx 0,52$), dans lesquelles une partie des ions de Zr et de Ti ont été substitués par Nb^{5+} et Li^+ sur les sites octaédriques (de type B), de sorte qu'on réalise la compensation des valences et que les composés résultés conservent leur stoechiométrie. Les substitutions se sont réalisées dans les proportions suivantes : Nb = 0,285 ; 0,428 ; 0,570 moles % et Li 0,007 ; 0,011 ; 0,014 moles %, les composés résultés étant notés NbLi 1, NbLi 5 et, respectivement, NbLi 2.

On a préparé les matériaux par la technique céramique ordinaire du mélange d'oxydes des métaux respectifs, de pureté, en général, p.a. Notons les principales étapes de cette technologie :

a) pesée et homogénéisation des matières premières dans un moulin planétaire en récipients d'agate, à billes d'agate, en alcool méthylique, pendant 2 heures ;

b) calcination du mélange en creusets de corindon fritté aux températures comprises entre 800...950°C, pendant 2 heures ;

c) mouture du calciné dans le même moulin à billes pendant 4...6 heures afin d'obtenir des poudres à granulation sous-micronique ;

d) pressage des poudres moulues sous forme de plaquettes à divers diamètres compris entre $\varnothing = 10...20$ mm, en matrices d'acier à des pressions entre 0,5 et 5 t/cm² ;

e) frittage des échantillons en nacelles de corindon fritté en l'air, à des températures comprises entre 1 000...1 200°C pendant 5 heures.

Les échantillons frittés ont été polis manuellement ou automatiquement par polissage plan-parallèle à diverses épaisseurs h , au moyen de poudres abrasives.

Pour déterminer les paramètres piézoélectriques, les échantillons doivent subir une „polarisation “ le long d'une direction normale au plan de la plaquette. En ce but, sur les deux faces de la plaquette, on a déposé des électrodes en argent, en argentant avec une pâte, et en réchauffant à 560°C. Ensuite, on immerge l'échantillon introduit dans un dispositif spécial dans un bain d'huile siliconique, on chauffe à environ 300°C, puis on applique un champ électrique de 25...30 kV/cm, engendré par une source de haute tension, et on laisse refroidir en champ électrique jusqu'au dessous de 70°C, à une vitesse de refroidissement d'environ 3°C/min.

La détermination des paramètres électriques et piézoélectriques des échantillons pôlés a été faite après 24 heures après polarisation, conformément aux standards internationaux.

Les mesures expérimentales pour caractériser au plus complet ces matériaux ont compris :

a) observations métallographiques pour la caractérisation morphologique (dimensions des cristallites, distribution des pores). En ce but les échantillons ont été polis métallographiquement au moyen de poudres abrasives, alumine et pâtes diamantées, puis attaqués thermiquement ou à l'aide d'une solution de $\text{HCl} + \text{HF}$ pendant 15...30 secondes.

b) détermination de la densité ρ autant par considérations géométriques que par considérations picnométriques, les différences entre les résultats des deux types de déterminations étant inférieures à 1,5% ;

c) détermination de la température Curie ;

d) détermination des fréquences de résonance f_s et antirésonance f_a pour le mode radial de vibration sur des échantillons disques, ainsi que la fréquence de résonance f_1 et antirésonance f_2 pour le mode de vibration longitudinal sur des plaquettes parallélépipédiques à l'aide d'une installation de mesure spécialisée „Level measuring set“ PSM-5 dans le domaine de fréquence 10Hz...36 MHz. Avec la même installation on a déterminé à la fois l'impédance de l'échantillon Z_m à la résonance ;

e) détermination de la capacité électrique C et de la conductance G à l'aide d'un pont universel type Wayne Kerr B 224 fonctionnant à la fréquence fixe de 1 592 Hz.

À l'aide de ces grandeurs déterminés expérimentalement on peut évaluer les principaux paramètres piézoélectriques en employant les expressions suivantes :

$$(1) \quad \text{constante diélectrique} \quad \epsilon_{33}^T = \frac{4hc}{\pi \Phi^2},$$

$$(2) \quad \text{pertes diélectriques} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{G}{C} 10^8,$$

$$(3) \quad \text{compliance élastique} \quad s_{11}^E = \frac{\eta^2}{\pi^2 (1 - \sigma_{12}^E) \rho N_p},$$

$$(4) \quad \text{coefficient de charge électrique} \quad d_{31} = \sqrt{\frac{(1 - \sigma_{12}^E) \epsilon_0 \epsilon_{33}^T s_{11}^E}{2}} k_p,$$

$$(5) \quad \text{coefficient de tension} \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\epsilon_0 \epsilon_{33}^T},$$

$$(6) \quad \text{facteur de qualité mécanique} \quad Q_m = \frac{f_a^2}{2\pi f_s Z_m C (f_a^2 - f_s^2)},$$

où

$$(7) \quad k_p = \sqrt{\frac{\Delta f}{0,574 \Delta f + 0,395 f_s}},$$

$$(8) \quad k_{31} = \sqrt{\frac{\Delta f_1}{0,595 \Delta f_1 + 0,404 f_1}},$$

$$(9) \quad N_p = \Phi f_s, \quad (10) \quad \sigma_{12}^E = 1 - 2 \frac{k_{31}^2}{k_p^2},$$

Les autres quantités intervenant dans les expressions ont la signification suivante : ϵ_0 — constante diélectrique du vide égale à $8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m ; $\Delta f = f_a - f_s$; $\Delta f_1 = f_2 - f_1$; η — la première racine positive de l'équation

$(1 + \sigma^E)J_1(\eta) = \eta J_0(\eta)$, où $J_i(\eta)$ sont les fonctions Bessel de première espèce et ordre i ; σ_{12}^E — coefficient de Poisson.

3. Résultats expérimentals. Dans les fig. 1—7, on présente les principaux résultats expérimentals obtenus. Les graphiques présentent les valeurs des différents paramètres électriques et piézoélectriques en fonction de la porosité, puisque celle-ci est une mesure de la température du traitement thermique. Vu que la maturation des échantillons suppose à la fois la densification et l'accroissement des cristallites, dans la représentation graphique on a distingué les traitements thermiques qui ont conduit aux porosités égales, mais ils ont été réalisés aux températures situées au-dessous et, respectivement, au-dessus de la température de densification maximale T_0 . Pour mettre en évidence l'influence de l'accroissement des dimensions des cristallites sur les paramètres électriques et piézoélectriques, dans leur graphiques de variation en fonction de la porosité, on a représenté par figures géométriques blanches et, respectivement, noires les valeurs obtenues par traitements aux températures situées au-dessous et, respectivement, au-dessus de T_0 .

Au cas des traitements faits à des températures inférieures à T_0 , à mesure que la porosité baisse, on voit s'accroître le coefficient de couplage piézoélectrique k_p (fig. 1), la constante diélectrique ϵ_{33}^T (fig. 2) et les constantes piézoélectriques d_{31} (fig. 5) et g_{31} (fig. 6). En même temps baisse $\tan \delta$ (fig. 3) et la compliance élastique s_{11}^E (fig. 4).

Pour les traitements effectués à des températures supérieures à T_0 , pour lesquels l'influence du processus d'accroissement des cristallites peut prévaloir sur l'influence de la densification, on constate que :

a) le coefficient de couplage piézoélectrique baisse de façon monotone quand la porosité s'accroît, étant donc indépendant de la dimension des cristallites (fig. 1);

b) la courbe de variation de la constante diélectrique en fonction de la porosité présente un maximum correspondant à la granulation optimale (fig. 2);

c) les variations de la compliance élastique (fig. 4) et des constantes piézoélectriques en fonction de la porosité sont monotones, l'influence des dimensions des cristallites apparaissant comme insignifiante. Au cas du composé NbLi 5, elles suivent évidemment la variation de l'activité piézoélectrique exprimée par le coefficient de couplage piézoélectrique;

d) les pertes diélectriques des composés NbLi 2 et NbLi 5 ont de faibles minima, au cas de NbLi 5 ce minimum correspondant à la valeur maximale de la constante diélectrique.

Le palier observable dans la variation du coefficient de couplage piézoélectrique k_p en fonction de la porosité, au cas du NbLi 5 (fig. 1), en corrélation avec le maximum de la constante diélectrique (fig. 2), conduit à la conclusion que le domaine de températures optimales de frittage est plus étendu ($\sim 75^\circ\text{C}$) que dans le cas des autres composés ($< 50^\circ\text{C}$).

Les températures Curie ont des valeurs élevées: 379°C , 388°C , et 381°C pour les matériaux NbLi 1, NbLi 5 et, respectivement, NbLi 2, ce qui conduit à des stabilités améliorées des paramètres par rapport aux variations de température.

3. **Conclusions.** 1. On a réalisé trois nouveaux matériaux à base de PZT à substitutions de Nb et Li sur les sites octaédriques, de sorte que les composés résultés sont stoechiométriques.

2. On a utilisé une technologie dont le frittage a été fait en l'air, à des températures relativement basses ($\sim 1100^{\circ}\text{C}$).

3. Tous les composés ont présentés une intensification de l'activité piézoélectrique ($k_p \sim 0,55$) le facteur de qualité mécanique ayant des valeurs réduites ($Q_m \sim 100$). La mobilité des parois étant grande (Q_m petit) le vieillissement est très réduit parce qu'il se réalise dans un intervalle de temps très court, après la polarisation.

4. Dans le groupe, on remarque un matériel à propriétés supérieures (NbLi 5), à domaine de température de frittage élargi et à paramètres améliorés par rapport à la classe des matériaux piézocéramiques dont le facteur de qualité mécanique est réduit [2]: $k_p \sim 0,55$; $\epsilon_{33}^T = 1400$; $\text{tg } \delta < 1,5 \cdot 10^{-3}$; $d_{31} \sim 135 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$; $g_{31} \sim 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C}$.

5. Les températures Curie ont des valeurs élevées ($> 380^{\circ}\text{C}$), fait qui assure une meilleure stabilité des paramètres piézoélectriques par rapport aux variations de la température.

Reçue le 20 Septembre 1982

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique
et

Institut de Physique et de Technologie des
Matériaux, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Jaffe B., Cook W. R. Jr., Jaffe H, *Piezoelectric Ceramics*, 1971.
2. van Randeraat J., Setterington R. E., *Piezoelectric Ceramics*, 1974.

EFFECTUL IONILOR DE Nb ȘI Li ȘI A TRATAMENTULUI TERMIC ASUPRA PARAMETRILOR PIEZOELECTRICI ÎN MATERIALE DE TIP PZT

(Rezumat)

S-au realizat trei materiale piezoceramice noi, pe bază de zirco-titanat de plumb (PZT) cu substituții de Nb și Li, la care s-au obținut parametri electrici și piezoelectrics îmbunătățiți față de materialul de bază. Materialele au fost sinterizate în aer, la temperaturi relativ joase ($\sim 1100^{\circ}\text{C}$) în comparație cu materialele tradiționale. Temperaturile Curie corespunzătoare acestor compuși sînt mai mari de 380°C .

RECENZII

BOOK REVIEWS

РЕЦЕНЗИИ

A. A. OLINER (Ed.), *Acoustic Surface Waves*. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1978, 350 pp.

The last decade new and exciting fields of applied physics and engineering — like optical fibers or magnetic bubble technologies — have developed in a really impressive manner. Among them there is the interdisciplinary domain based on surface acoustic waves (S.A.W.), which combines ideas from solid mechanics, solid state physics and microwaves.

Acoustic surface waves are elastic waves of very high frequency that can be guided along the interface between two media, at least one of them being a solid. In order to make possible interactions with electromagnetic fields the solid medium is usually a piezoelectric one. These waves have a rather low velocity (therefore a small wavelength). So, we can benefit from substantial reductions in devices' dimensions and weight. An important fact is that the realization of SAW devices is compatible with integrated circuits technology, with immediate consequences on prices and reproducible characteristics. Current concerns with the SAW field extend to Non-destructive Evaluation, Seismology and Signal Processing (with applications to Radar, Spread Spectrum Communications, Air Traffic Control, Data Handling Systems and Sonar Systems).

The book deals with basic aspects of the domain concerning properties of Surface Acoustic Waves, principles of operation of the most significant devices and technological problems.

The first chapter reviews the types and basic properties of surface waves. In the next one, dedicated to Surface Wave Filters, a special attention was paid to the Interdigital Transducer (the most fundamental component in SAW technology) used for transducing electrical input signals into surface waves.

The main section deals with problems of Signal Processing using SAW devices like delay lines, resonators, oscillators. Are also treated „time domain structures“ (like Pulse Compression Filter for Chirp Radar, Phase Coded Devices for Spread Spectrum Communications), Non-linear Signal Processing Devices and Multipoint Acoustic Devices.

The remaining chapters present the main problems concerning Wave Guides for Surface Waves, properties of the materials taken in consideration and their influence on performance and the fabrication procedures which make the SAW devices possible.

Finally, we can say that the attempt has been to stress permanently the fundamentals. In this way the book represents a major reference for anyone interested in the field, covering all the aspects in a rigorous but accessible manner.

Irina Jemna

RONALD GAUTREAU and WILLIAM SAVIN, *Theory and Problems of Modern Physics*. McGraw-Hill Book Company, 1978.

The professors Gautreau and Savin from New Jersey Institute of Technology have written an excellent book on modern physics. The book covers all topics of modern physics

beginning with special theory of relativity and finishing with atomic systems. Each chapter consists of a succinct presentation of the principles and is followed by a large number of completely solved problems. This point of view permits that each chapter to be developed in detail and each principle to be illustrated in full. The solved problems have been made short and to the point, and have been ordered in terms of difficulty. They are followed by unsolved supplementary problems, with answers allowing the reader to check his grasp of the material. It is a general opinion that these solved problems are a valuable learning tool.

The present book is and will be long time an excellent aim for the student in his selfstudy and for the teachers in preparing their lessons.

I. Grosu

JOHN L. JUNKINS, *An Introduction to Optimal Estimation of Dynamical Systems*. Sijthoff & Noordhoff Int. Publishers, Alphen aan den Rijn, 1978, pp. 339 + XIV.

Le volume paru fait partie de la série des travaux étudiant l'estimation du „meilleur“ system par la détermination de ses paramètres. Ainsi dire, l'auteur présente les suivantes méthodes principales utilisées: l'approximation par la méthode des moindres carrées, l'estimation de la variance minima. L'estimation des systèmes dynamiques occupe un important espace du volume. Les méthodes employées sont illustrées par différents exemples ayant un degré variable de difficulté, à savoir: la triangulation plane, l'orientation des missiles, la modélisation de la topographie de la terre, le potentiel gravitationnel. De plus, le livre présente un large chapitre sur les équations différentielles ordinaires et les annexes concernant la minimization des fonctions ayant n -variables, les équations algébriques linéaires, les idées fondamentales de la théorie des probabilités ainsi qu'une riche bibliographie (493 titres).

Le volume s'adresse aux ingénieurs mécaniciens, géodésiens ainsi qu'aux chercheurs travaillant dans le domaine d'optimisation et d'estimation des systèmes.

Victor Florin Poterașu

K. H. HELLWEGE (Ed.), *LANDOLT-BÖRNSTEIN-Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*. Vol. III/11, *Elastic, Piezoelectric, Pyroelectric, Piezooptic, Electrooptic Constants and Nonlinear Dielectric Susceptibilities of Crystals*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 854 pp + 677 fig.

Within the last years many data on elastic and related properties of solid materials were published or revised. The volume III/11 specifies, in tables and series of diagrams, elastic, piezoelectric, pyroelectric, piezooptic, electrooptic properties, nonlinear dielectric susceptibilities of crystals and their temperature and pressure coefficients. This is a revised and extended edition of volumes III/1 and III/2, including all relationships and values from publications up to 1977 on above mentioned properties. Elastic constants of second, third and higher order are presented in 83 tables and 328 figures on about 300 pages; 240 tables and 340 figures are dedicated to piezoelectric, electrostrictive, piezooptic, electrooptic and pyroelectric constants. The nonlinear dielectric susceptibilities represent the subject of 17 tables and 12 diagrams.

It should be mentioned that the value listed in the tables of nonlinear susceptibilities are absolute value, the newest and most exact ones for some standard substances.

Each chapter has an introduction where notations, methods of measuring, secondary effects, accuracy, way of selection of data and bibliography are synthetically presented.

For the readers' convenience two indexes follow the tables:

- i) an alphabetical index of substances, presenting simultaneously a survey on the available information;
- ii) an alphabetical index of properties (subject index).

The publication is a convenient, complete work, remarkable for its sense of accuracy. Not only it covers a large field but also it is very accessible due to its good organisation. The volume represents a reference book useful for researchers, both in solid state physics and electronic materials technology.

Irina Jemna

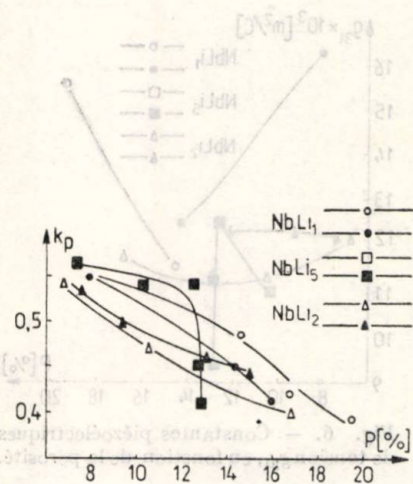


Fig. 1. — Facteurs de couplage piézoélectrique en fonction de la porosité.

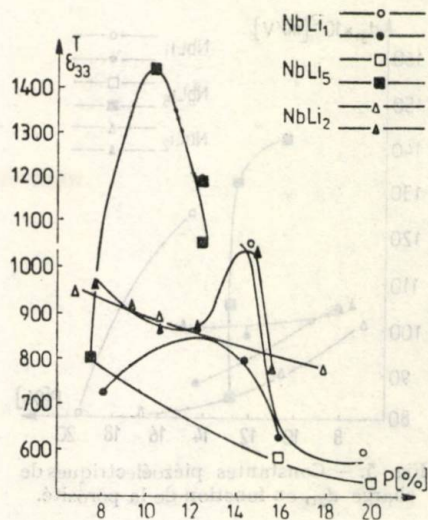


Fig. 2. — Constantes diélectriques en fonction de la porosité.

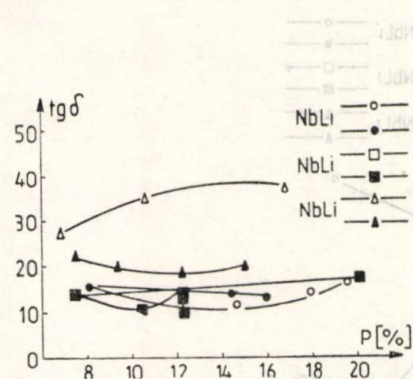


Fig. 3. — Tangentes de l'angle de pertes en fonction de la porosité.

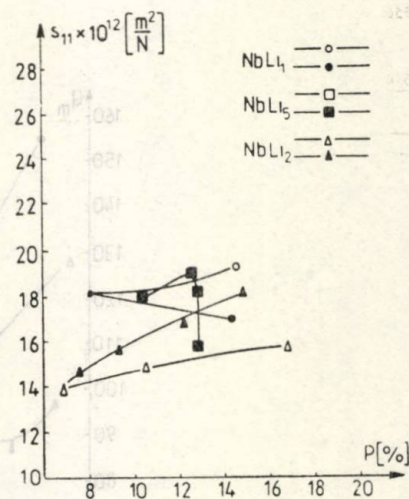


Fig. 4. — Compliances élastiques en fonction de la porosité.

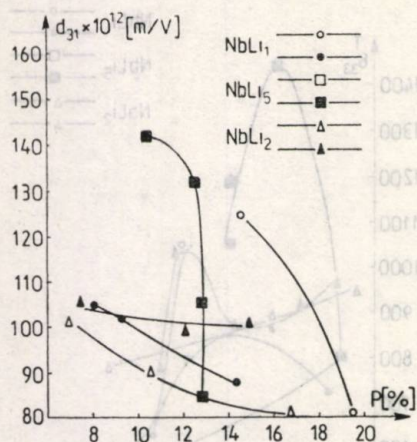


Fig. 5. — Constantes piézoélectriques de charge d_{31} , en fonction de la porosité.

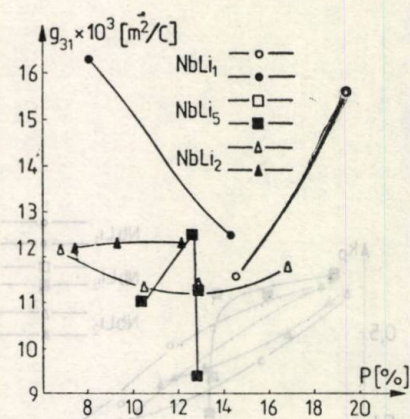


Fig. 6. — Constantes piézoélectriques de tension g_{31} , en fonction de la porosité.

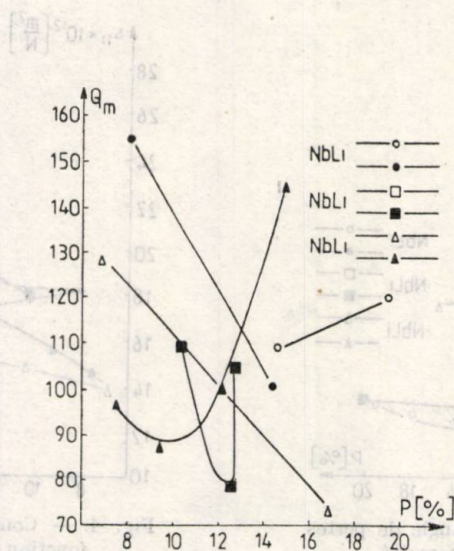


Fig. 7. — Facteurs de qualité mécanique Q_m , en fonction de la porosité.

卷一百一十五

